

MC/6
STORIA DELLA MATEMATICA 1
A.A. 2007-2008
ANA MILLÁN GASCA

LE ORIGINI DELLA MATEMATICA

SOMMARIO: 1. Quantità e numeri. 2. La parola *matematica*: “ciò che si insegna, ciò che si impara”. 3. Il calcolo utile: algoritmi e problemi. 4. La matematica dotta di tradizione greca nella cultura europea. Esercizi

1. Quantità e numeri

Il Signore parlò a Mosè nel deserto del Sinai, nella tenda del convegno, il primo del secondo mese, nel secondo anno dalla loro uscita dalla terra d’Egitto, e disse: “Fate il censimento dell’intera comunità dei figli di Israele secondo le loro famiglie, secondo la loro casa paterna, numerando le persone, tutti i maschi, testa per testa. Dai venti anni in su, tutti quelli che in Israele sono abili per l’esercito, tu ed Aronne li censirete per il loro arruolamento”.

Numeri (Arithmòì) 1, 1-3

I *conteggi* di oggetti e di quantità e le *registrazioni scritte* dei risultati di tali conteggi costituiscono la prima manifestazione storica del concetto di numero. Nelle testimonianze scritte di tutte le civiltà antiche si ritrovano parole-numero (i numerali) e una piccola collezione di segni grafici che rendono possibile registrare le quantità (i simboli numerici o cifre), organizzati seguendo diversi sistemi di numerazione.

Nei reperti più antichi, le tavolette di argilla ritrovate nella città di Uruk, in Mesopotamia, risalenti alla fine del IV millennio a. C., le quantità registrate riguardano questioni amministrative e tecniche (tasse, pagamenti, magazzini, edilizia); i segni utilizzati cambiano a seconda di ciò che si conta. In Cina, i primi segni numerici si ritrovano in iscrizioni su ossa di animali o gusci di tartaruga risalenti alla seconda metà del II millennio a.C. riguardanti la divinazione (ad esempio, sul risultato della caccia). In India, i reperti più antichi che contengono cifre sono gli editti emessi dall’imperatore Ashoka (III secolo a.C.) in sanscrito incisi su rocce o colonne in scrittura alfabetica. In America centrale, in una stele situata nel sito archeologico di Pestac si trova la più antica testimonianza (risalente all’anno 665 d. C.) del sistema di numerazione posizionale in base 20 usato dai maya per contare i giorni del calendario.

L’evoluzione organizzativa delle società umane è stata accompagnata da un’incessante attività di calcolo: conteggi, misurazioni, conti. Per il lavoro come per la guerra, si contavano le persone, i

giorni, gli animali, si misuravano (grazie ai vari sistemi di unità di misura) le quantità di grano, di birra, di metallo, le lunghezze e le aree. Furono sviluppati algoritmi per eseguire addizioni e moltiplicazioni (diversi a seconda del sistema di numerazione adoperato), procedure di calcolo di aree di figure geometriche, metodi per risolvere problemi basati sull'idea di proporzionalità, tavole di quadrati o reciproci dei numeri e – in Egitto – una notazione per le frazioni dell'unità.

La notazione simbolica di quantità è una parte delle convenzioni di ogni sistema di scrittura; anzi, secondo alcune ipotesi, la registrazione numerica potrebbe essere stata all'origine dell'invenzione stessa della scrittura nel IV millennio a. C. nel Vicino Oriente antico. Nel mondo antico, il calcolo – come la scrittura – rappresentò innanzitutto uno strumento tecnico sviluppato nelle società antiche in cui emerse un'autorità e un'organizzazione burocratica e, nel contempo, si sviluppò la divisione del lavoro. Infatti, l'addestramento nella scrittura e il calcolo – utili per i censimenti e le attività amministrative, così come per la costruzione e per organizzare i cantieri e altre attività – era la specializzazione della prima “professione intellettuale” nella storia, quella degli scribi in Mesopotamia ed Egitto.

E tuttavia, né la scrittura né il calcolo rientravano strettamente nella sfera della tecnica. L'umanità antica non ha registrato soltanto attività, amministrazione e lavoro. Le lunghe liste di parole compilate dagli scribi sumeri come sussidio alla scrittura furono la prima manifestazione del pensiero contemplativo sulle cose del cielo e della terra; seguirono dopo i poemi cosmologici, le cronologie, i manuali tecnici e i grandi testi della divinazione mesopotamica. Nel corso dei secoli, la scrittura è stata la base dello sviluppo della letteratura, delle grandi concezioni cosmologiche e religiose e della nascita della filosofia greca. Non a caso i testi della tradizione religiosa giudaico-cristiana sono note come “le scritture”, oppure “i libri” (“biblia”). Allo stesso modo, i numeri acquisirono già nel mondo antico un valore *astratto*, indipendente dal loro uso come numeri *concreti*, ossia come “numeri di” (di persone, di merci, di giorni). Furono i Greci i primi a considerare il concetto astratto di numero: «un numero è» – si legge nell'opera di Euclide, gli *Elementi* – «una pluralità composta da unità».

Lo studio *teorico* (vale a dire, indipendente da qualsiasi uso *pratico*) delle proprietà dei numeri, intesi come entità autonome, è l'oggetto di una disciplina creata dalla cultura greca, l'*aritmetica*. I primi a studiare le proprietà dei numeri pari e dispari, dei numeri primi e della proporzionalità numerica furono i pitagorici, i quali, oltretutto, ricercarono in tali proprietà la chiave per la comprensione dell'universo.

2. La parola «matematica»: “ciò che si insegna, ciò che si impara”

L'aritmetica era una delle discipline considerate sorelle, le *mathemata*, che significa, in greco, “ciò che si impara e che si insegna”. Il filosofo Platone, nel dialogo *Repubblica*, scriveva:

«– Stabiliremo che per un guerriero sia dottrina necessaria quella del computare e del noverare? – Più di qualsiasi altra, se vuol riuscire intenditore di ordinamenti militari, anzi se vuole essere uomo.»

E precisava più avanti:

«È dunque opportuno, o Glaucone, prescrivere per legge questa dottrina, e persuadere coloro che dovranno occuparsi delle faccende più importanti dello Stato di dedicarsi alla scienza dei conti, non però alla volgare maniera, ma fino a tal punto che l'intelligenza loro possa contemplare la natura dei numeri, non già occupandosene a scopo di compra e vendita, come mercanti e rivenditori, bensì in servizio della guerra e della tranquillità dell'anima, sì da condurla dal generato alla verità e all'essere.»

Quindi, tutte le civiltà hanno escogitato sistemi per scrivere i numeri e procedure per risolvere dei problemi pratici attraverso calcoli con numeri: ciò mostra una conoscenza implicita di certe proprietà generali dei numeri e quindi del concetto astratto di numero. Questi calcoli riguardavano anche lunghezze, superfici e volumi di figure geometriche piane e di solidi geometrici. Tuttavia, nei documenti della Mesopotamia o dell'Egitto, come più tardi in quelli della Cina e dell'India, non si parla in generale di numero, di punto, di proporzionalità o di triangolo, e non si espone mai una procedura di valore generale, bensì si risolvono soltanto problemi con valori numerici concreti: furono i Greci a concepire lo studio *teorico* delle proprietà dei numeri e delle figure, attraverso il metodo della dimostrazione, creando così un nuovo campo del sapere umano, la matematica.

3. Il calcolo utile: algoritmi e problemi

Raccolte di problemi appartengono alla tradizione matematica di ogni tempo e ogni luogo. I più antichi testi matematici oggi noti, il *Papiro Rhind* e le tavolette babilonesi, hanno questa struttura.

Per molto tempo la forma più consueta di trasmissione della cultura matematica fu proprio quella della collezione di problemi. La trasformazione, avvenuta nella Grecia classica, della matematica da scienza della risoluzione di problemi a scienza della dimostrazione ipotetico-deduttiva, cambiò non solo i contenuti, ma anche la forma dell'esposizione. Tuttavia accanto alla matematica "dotta" continuò ad evolversi una matematica "popolare" o "pratica", la cui principale forma di espressione rimase la raccolta di problemi, spesso raggruppati per similarità di metodi risolutivi.

(Raffaella Franci, "Introduzione" al testo *Problemi per rendere acuta la mente dei giovani* (*Propositiones ad acuendos juvenes*, fine del VIII secolo) di Alcuino di York)

La scrittura e il calcolo, in Mesopotamia e in Egitto, erano abilità che richiedevano un lungo addestramento, a causa dei complicati sistemi di registrazione scritta in uso prima dell'introduzione dell'alfabeto e anche degli strumenti a disposizione; entrambe queste tecniche erano riservate a un casta di funzionari dello stato, gli scribi. L'addestramento degli scribi avveniva in vere e proprie scuole nell'ambito del palazzo, nelle quali venivano tramandati le "ricette" o metodi pratici per risolvere i problemi di tipo amministrativo o di edilizia che erano di loro competenza (pagamenti di tasse e salari, misurazioni).

Un ricco insieme di documenti risalenti all'inizio del II millennio a.C. dell'area dell'antica Babilonia (nella bassa Mesopotamia, dove oggi si trova la città di Baghdad) mostra la ricchezza delle conoscenze accumulate per quanto riguarda questo calcolo o "matematica pratica". Non si tratta però di registrazioni amministrative di casi reali, bensì proprio di raccolte di *problemi* destinati ad uso scolastico, sotto la forma caratteristica che ci è familiare: un enunciato con dati numerici specifici relativi a un compito pratico, e la descrizione di una serie di passi, che includono varie operazioni aritmetiche, fino ad arrivare alla soluzione. Alcuni sono facili di interpretare, in altri casi la procedura è stata oggi tradotta in forma algebrica, ma non è dato sapere in che modo si era arrivati ad individuare la procedura.

Anche i pochi documenti egizi a contenuto matematico che ci sono pervenuti, scritti su papiro e risalenti allo stesso periodo, consistono in elenchi di problemi. Fra gli esempi raccolti, destinati all'esercizio degli scribi, non mancano alcuni con dati lontani dalla realtà o complicati artificialmente, oppure enunciati scherzosi, come il famoso problema 79 del papiro Rhind (conservato presso il British Museum a Londra): «Inventario di una proprietà. 7 case. 49 gatti. 343

topi. 2401 chicchi di frumento. 16807 hekat (un'unità di capacità). Totale 19607» ... un "indovinello" che scherza sugli errori di uno scolaro disattento, che sa eseguire benissimo un'addizione ma non esita a sommare gatti a topi e a chicchi di frumento!

La tradizione del calcolo e la geometria pratica è proseguita nel mondo antico, nel Medioevo e fino all'Età moderna. Vi sono anche le tradizioni della Cina e dell'India, oltre a quella che ebbe origine nel Vicino Oriente antico e in Egitto. Come per tutte le conoscenze pratico-tecniche, le sue vie di trasmissione furono soprattutto orali, da padre a figlio, nei cantieri e nelle botteghe, e attraversarono anche aree culturali diverse, viaggiando con le carovane dei mercanti (come quelle sulla via della Seta) e con i tecnici e artigiani ingaggiati presso terre lontane per poter usufruire di conoscenze tecniche forestiere. Vi è stata anche una tradizione di libri su questo argomento, ancorati sempre all'esposizione basata sugli elenchi di problemi: dal *Jiuzhang suanshu* (Nove capitoli sui procedimenti matematici) compilato in Cina nel periodo classico dopo l'unificazione imperiale (epoca Han, 206 a.C.-220 a.C.) ai trattati degli agrimensori romani, al capitolo di matematica presente nei *siddhanta*, opere indiane medievali di astronomia in versi scritte in sanscrito, come quella di Aryabhata (scritta attorno al 500 d.C.).

La matematica pratica accompagnò il risveglio dell'Europa e delle sue città, la ripresa dei commerci, delle botteghe e della produzione nel corso del Medioevo, soprattutto a partire dall'anno Mille. Nelle terre che erano state parte dell'Impero romano di Occidente si ebbe una felice commistione fra l'antica tradizione pratica e le nuove tecniche di calcolo e l'algebra dei matematici delle terre dell'Islam. Agli inizi del IX secolo, su consiglio di Alcuino di York, Carlomagno decretò l'istituzione, presso conventi e cattedrali, di scuole in cui si insegnava ai fanciulli a leggere, la grammatica e il far di conto (che allora seguiva le procedure in uso in epoca romana e faceva uso dell'abaco), incluso il computo (il calcolo della data della Pasqua, che era allora un vero e proprio problema della matematica pratica). Alcuino compilò una raccolta di problemi sotto il titolo *Propositiones ad acuendo juvenes* (Problemi per rendere acuta la mente dei giovani), fra cui molti problemi ricreativi. In greco fu scritta invece la compilazione di problemi nota come *Antologia palatina*, preparata da Costantino Cefala nel X secolo.

Nel mondo islamico medievale fu introdotta un'innovazione tecnica fondamentale nel calcolo pratico: il sistema di numerazione decimale posizionale di derivazione indiana basato sui nove segni grafici oggi usati in tutto il mondo per i numeri dal 1 al 9 e sull'introduzione del numero zero con il simbolo 0, e insieme ad esso gli algoritmi per effettuare le quattro operazioni elementari grazie a tale sistema. Su questa scia si colloca il lavoro del matematico persiano di cultura arabo-islamica Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi, uno dei grandi studiosi della Casa della Sapienza di Bagdad all'epoca del califfato di al-Ma'mun (813-833), che si interessò in particolare alla risoluzione dei problemi di ripartizione delle eredità (regolati da prescrizioni religiose). Al-Huwarizmi trovò il modo di introdurre la metodologia teorica della matematica greca, sulla quale era versato, considerando grandi gruppi di problemi che potevano essere ricondotti a una stessa formulazione generale: si individuava una quantità *incognita*; e si scriveva una certa condizione che essa verificava, sotto forma di uguaglianza (ciò che oggi chiamiamo *equazione algebrica*). Per ognuno dei tipi di equazioni ottenuto si poteva allora cercare una soluzione anch'essa generale, una formula che forniva la soluzione. Egli esprimeva questa sua teoria a parole; nel seguito, alcuni matematici europei introdussero la notazione simbolica algebrica usata oggi. Così nacque una nuova branca della matematica, l'*algebra*, la teoria della risoluzione delle equazioni e il calcolo delle espressioni algebriche. La parola «algoritmo» deriva dal nome di al-Huwarizmi, mentre la parola «algebra» deriva dal titolo, in arabo, del libro nel quale egli presentò il suo metodo.

4. La matematica dotta di tradizione greca nella cultura europea

Il calcolo e l'algebra arabe furono presentate in latino nel libro *Liber abaci* (1202) scritto da Leonardo Pisano. Fra i secoli XIII e XIV, prima in alcune città italiane e nel seguito anche nell'area dei lingua tedesca, furono fondate – sia dai comuni sia da singoli maestri – le *scuole d'abaco*, dove

si insegnava ai fanciulli il calcolo (facilitato dalle procedure arabe, quindi sulla carta e senza più adoperare l'abaco, nonostante il nome delle scuole) e la risoluzione dei problemi utili per le attività commerciali. L'insegnamento si svolgeva in lingua volgare, seguendo dei manuali per l'insegnamento, i *libri d'abaco* scritti dai maestri d'abaco. La scrittura dei numeri e gli algoritmi di calcolo erano nuovi, ma i problemi risolti si collegavano all'antichissima tradizione pratica (calcolo di aree, suddivisione di rettangoli, suddivisione di vettovaglie in parti uguali o proporzionali, testamenti, riempimento di vasche), insieme a temi allora di attualità come il calcolo degli interessi oppure le tecniche di contabilità a doppia entrata.

Tuttavia, l'Europa medievale era anche erede della concezione pedagogica greco-latina, i cui scopi erano ben diversi dall'*addestramento tecnico*. L'ideale di *educazione* era legato alla formazione religiosa cristiana e allo studio delle sette arti liberali, il *trivium* (grammatica, retorica e logica) e il *quadrivium* (aritmetica, geometria, astronomia e musica). Con la fondazione delle università a partire dal XII secolo, questi argomenti diventarono la formazione di base per lo studio nelle facoltà. Le arti liberali erano quelle che formavano il pensiero preparandolo alla speculazione filosofica e teologica, in opposizione quindi alle arti meccaniche, ossia il sapere utile nelle attività.

Il *quadrivium* corrispondeva alle quattro discipline della matematica greca, così com'erano erano state riassunte in alcuni manuali scritti in latino nel periodo tardo antico (attorno al V secolo). La fine del mondo antico aveva però fortemente danneggiato lo studio della matematica: i pochi manoscritti dei testi greci giacevano nei monasteri senza che vi fossero studiosi in grado di studiarli e di trasmettere le conoscenze. Quindi nelle scuole delle cattedrali e persino nelle università, si leggeva poco più delle prime pagine del Libro I degli *Elementi* di Euclide, e i temi teorici venivano sostituiti proprio dall'aritmetica e dalla geometria pratica. Così molti confondevano le ricette pratiche degli agrimensori romani con le costruzioni e dimostrazioni della geometria greca: tale confusione illustra la convivenza di due tradizioni diverse per scopi e contenuti, eppure legate fra di loro.

Esercizi

- 1) Legga l'introduzione al libro *All'inizio fu lo scriba* e scriva un riassunto in meno di 1000 caratteri.
- 2) Costruisca un asse cronologico in un foglio A3 a quadretti (a partire dell'anno 1000 a.C., scegliendo opportunamente la lunghezza di un segmento corrispondente a un secolo). Inserire i dati presentati nel paragrafo §1 sui più antichi reperti che includono simboli numerici nel Vicino Oriente, in Cina, in India e nelle terre dei maya in America Centrale. Lo personalizzi, completandolo con altri riferimenti storici utili tratti anche dal suo manuale scolastico di storia.
- 3) Quali date segnano convenzionalmente la fine dell'Antichità, l'inizio dell'Età moderna, l'inizio dell'Età contemporanea, l'egira o inizio del calendario nell'Islam? Collochi queste date nell'asse temporale dell'esercizio 2. Inserisca ora i dati cronologici (autori, date, opere) dei §§2 e 3.
- 4) Qual è l'opera più nota di Euclide? Quali sono i due argomenti principali trattati in tale opera? A che data si fa risalire? In che lingua è scritta?
- 5) In che senso il calcolo utile può essere considerato parte della conoscenza tecnica?

tecnica (dal greco *téchne*, che fa riferimento al "saper fare", ossia alla capacità pratica di operare per raggiungere un dato scopo, basata sulla conoscenza ed esperienza del modo in cui è possibile raggiungerlo), insieme di procedure, metodi e oggetti artificiali che sono stati sviluppati dagli esseri umani per condurre molti tipi di attività: dall'agricoltura e l'allevamento, all'edilizia e la gestione del territorio, dalla guerra al commercio e alla produzione artigianale o industriale.

Aristotele distingue *téchne* (le attività produttive di beni durevoli), *praxis* (le attività proprie del cittadino, ossia la politica e la guerra) ed *episteme* (la attività speculativa o contemplativa del filosofo, ossia il sapere disinteressato e non orientato verso scopi pratici)

- 6) Indichi qualche esempio di attività di “matematica pratica” nel mondo preindustriale; indicare qualche esempio di attività di “matematica pratica” del mondo contemporaneo.
- 7) In italiano, la parola “geometra” può indicare due attività professionali molto diverse: illustri con questo esempio la differenza fra matematica e “matematica pratica”.
- 8) Spieghi la dicotomia arti liberali/arti meccaniche e collochi le matematiche in tale contesto.