Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009
AM1 - Analisi Matematica 1

TUTORATO III - STEFANO SPENSIERI E DORA MARTUCCI (14-10-08)
furettob@yahoo.it dora@matematica3.com

ESERCIZIO 1. Si provi che le condizioni che definiscono una relazione d'equivalenza sono indipendenti, dando allo scopo esempi di:

(a) relazione riflessiva e simmetrica ma non transitiva;

(b) relazione riflessiva e transitiva ma non simmetrica;

(c) relazione simmetrica e transitiva ma non riflessiva;

ESERCIZIO 2. Determinare quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza negli insiemi indicati e individuarne le classi d'equivalenza:

(a) $xy \geq 0$ in $\mathbb{R}$

(b) $xy \geq 0$ in $\mathbb{R}^*$

(c) $xy > 0$ in $\mathbb{R}$

(d) $xy > 0$ in $\mathbb{R}^*$

(e) $x - y \in \mathbb{Z}$

(f) $x^3 = y^3$ in $\mathbb{R}$

(g) $x^2 = y^2$ in $\mathbb{R}$

(h) Definiamo la funzione Parte Intera in $\mathbb{R}$ come: dato x, la parte intera di x (denotata con $[x]$) è il più piccolo intero a $\leq x$. Ad esempio $[3,8] = 3$. Verificare che $[x] = [y]$ è una relazione d'equivalenza.

ESERCIZIO 3. Usando il principio di induzione, provare che:

(a) $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1) = (2n+1)(n+1)$

(c) $2^3 + 4^3 + \ldots (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$