

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

GE4 - Geometria differenziale 1

ESERCIZI - ALVIN (06-10-2008)

ESERCIZIO 1. (Do Carmo, p. 25 es. 12) Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata (non necessariamente dall'ascissa curvilinea) e sia $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione di $\alpha(I)$ tale che β è parametrizzata dall'ascissa curvilinea $s = s(t)$, e poniamo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}, \quad \frac{d^3\alpha}{dt^3} = \alpha^{(3)}, \quad \dots$$

(1.1) Mostrare che

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\alpha}|}, \quad \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|^4}.$$

(1.2) Verificare che la curvatura di α in $t \in I$ è:

$$k(t) = \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

[Suggerimento. Usare il fatto che $(a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$.]

(1.3) Dimostrare che la torsione di α in $t \in I$ è:

$$\tau(t) = -\frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \alpha^{(3)}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|^2}$$

(1.4) Provare che, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva piana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, allora la curvatura con segno di α per $t \in I$ è:

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ESERCIZIO 2. (Do Carmo, p. 24 es. 10) Consideriamo l'applicazione:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}), & t > 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

(2.1) Provare che α è una curva differenziabile.

(2.2) Provare che α è regolare per ogni t e che, detta $k(t)$ la curvatura di α in t , $k(t) \neq 0$ per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ mentre $k(0) = 0$. [Suggerimento. Usare il punto 2 dell'esercizio precedente.]

(2.3) Mostrare che il limite dei piani osculatori per $t \rightarrow 0^+$, è il piano $y = 0$ mentre il limite dei piani osculatori per $t \rightarrow 0^-$, è il piano $z = 0$. (Questo implica che il vettore normale è discontinuo in $t = 0$ e mostra perché escludiamo i punti dove $k = 0$).

(2.4) Mostrare che, definendo τ per continuità, si ottiene che $\tau \equiv 0$ anche se α non è una curva piana.

ESERCIZIO 3.

(3.1) Dimostrare che la circonferenza $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio R ha curvatura costante $k = \pm\frac{1}{R}$ dove il segno dipende dal verso di percorrenza.

(3.2) Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare parametrizzata, con curvatura $k(t) = k_0 \in \mathbb{R}$ costante assegnata. Cosa si può dire su $\alpha(t)$?

ESERCIZIO 4. Determinare l'ascissa curvilinea delle seguenti curve:

(4.1) L'elica cilindrica di raggio a e passo b .

(4.2) La cardioide i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C} = \{(\cos t(1 - \cos t), \sin t(1 - \cos t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, 2\pi)\}$

(4.3) la cicloide, i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C}_1 = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, 2\pi)\}$

(4.4) l'astroide $\mathcal{C}_2 = \left\{ \left(\cos^2 t, \sin^2 t, \cos \frac{t}{2} \right) \in \mathbb{R}^3 : t \in (0, 2\pi) \right\}$

ESERCIZIO 5. (Do Carmo, p.23 es.6) Una *traslazione* di vettore $v \in \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $A(p) = p + v$, $p \in \mathbb{R}^3$. Un'applicazione lineare $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *trasformazione ortogonale* se $\rho u \cdot \rho v = u \cdot v$ per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$. Un *movimento rigido* in \mathbb{R}^3 è la composizione di una traslazione con una trasformazione ortogonale con determinante positivo (quest'ultima condizione è inclusa perché ci aspettiamo che i movimenti rigidi preservino l'orientazione).

(5.1) Dimostrare che la norma di un vettore e l'angolo θ tra due vettori, $0 \leq \theta \leq \pi$ sono invarianti sotto l'azione di una trasformazione ortogonale con determinante positivo.

(5.2) Mostrare che il prodotto vettoriale è invariante sotto l'azione di una trasformazione ortogonale con determinante positivo. Dire se l'affermazione rimane vera rimuovendo la condizione sul determinante.

(5.3) Mostrare che l'ascissa curvilinea, la curvatura e la torsione di una curva parametrizzata sono (qualora siano definite) invarianti per movimenti rigidi.