

# Am120 – Tutorato I

## Derivate

Mercoledì 3 Marzo 2010  
Filippo Cavallari

**Esercizio 1** Calcolare, usando la definizione, le derivate di:

(1)  $\frac{1}{x}$                       (2)  $\sqrt{x}$                       (3)  $\tan x$                       (4)  $x^n$

**Esercizio 2** Siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  tre funzioni derivabili in  $x_0$ . Calcolare  $(fgh)'(x_0)$ .

**Esercizio 3** Calcolare le seguenti derivate utilizzando soltanto le derivate delle funzioni elementari e le opportune regole di derivazione:

(1)  $\ln x$                       (2)  $x^r \quad r \in \mathbb{R}$                       (3)  $\arccos x$                       (4)  $\tan x$

(5)  $\arctan x$                       (6)  $\sin(3x^3 + 4^x)$                       (7)  $e^x(1 + x^2 + 3x^7)$                       (8)  $7^{x^2+4}$

(9)  $\sin(\pi^{\tan x})$                       (10)  $x \cdot \ln x \cdot \sin x$                       (11)  $e^{\sin(e^x)}$                       (12)  $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

(13)  $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)e^{-\cos x}$                       (14)  $\ln(x + \sin(\ln x))$                       (15)  $e^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$                       (16)  $\frac{\sin^2 x + \cos x}{\ln x}$

(17)  $\sin\left(\frac{\ln x}{x^3 + 4}\right)$                       (18)  $\ln^2(\arcsin x)$                       (19)  $\frac{\arctan(x^5 + x^\pi)}{\ln(2^x)}$                       (20)  $\sin(30x^3 - x^7)e^{\tan x}$

**Esercizio 4** Mostrare un esempio per ognuno dei seguenti quesiti:

- una funzione continua ma non derivabile in un punto
- una funzione derivabile in un punto la cui derivata non è derivabile in quel punto
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto esiste ma non è finito
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto non esiste

**Esercizio 5** Fissato  $\alpha > 1$  sia  $f$  definita  $\forall x \in \mathbb{R}$  tale che  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ .  
Dimostrare che  $f$  è costante.

**Esercizio 6** Definiamo le funzioni *seno* e *coseno iperbolico* nel modo seguente:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- provare a disegnare il grafico di entrambe le funzioni cercando di individuare eventuali simmetrie (in particolare dire se sono pari e/o dispari)
- verificare che  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- calcolare la derivata del seno e del coseno iperbolico
- indicare le loro funzioni inverse rispettivamente con  $\sinh^{-1} x$  (*arcoseno iperbolico*) e  $\cosh^{-1} x$  (*arcocoseno iperbolico*), calcolare le loro derivate
- dimostrare che
  - $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
  - $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- definita  $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$ , calcolarne la derivata
- calcolare le seguenti derivate:

$$(1) \sinh(\cosh(\sinh x))$$

$$(2) \sinh\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{7^x}\right)$$

$$(3) e^{\sinh(\arctan x)}$$

**Esercizio 7** Dire per quale valori dei parametri le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

$$(1) \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & x \geq 0 \\ 7e^x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{4a+b}{x^2+1} & x \geq 1 \\ x^2 + 2x(a+b) - 1 & x < 1 \end{cases}$$

**Esercizio 8** Dimostrare che:

$$(1) \frac{d^n}{dx^n} x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(2) \frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3) \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(4) \frac{d^n}{dx^n} \frac{ax+b}{cx+d} = (-1)^{n-1} c^{n-1} n! \frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}} \quad ad-bc \neq 0$$

**Esercizio 9** Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dire per quali  $\alpha$  la funzione è continua, derivabile e ha derivata continua.