

Am120 – Tutorato III

Teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy e De L'Hôpital. Studio di funzioni

Mercoledì 17 Marzo 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Dopo aver verificato che le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle negli intervalli indicati, trovare esplicitamente i punti in cui hanno derivata nulla:

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad x \in [1, 2]$

(2) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x \quad x \in [0, 1]$

(3) $f(x) = \sin^2 x \quad x \in [0, \pi]$

(4) $f(x) = \cos^2 x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Esercizio 2 Dopo aver verificato che la funzione $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ si annulla agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ mostrare che la sua derivata non si annulla in nessun punto dell'intervallo $(-1, 1)$. Perché non si può applicare il teorema di Rolle?

Esercizio 3 Verificare il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = 2x - x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 4 In quale punto la tangente alla funzione $f(x) = x^n$ è parallela alla corda passante per i punti $A(0; 0)$ e $B(b; b^n)$?

Esercizio 5 Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con $x \in [1, 2]$ per dedurre che $\frac{13}{12} < \sqrt[3]{2} < \frac{4}{3}$.

Esercizio 6 Usando il teorema di Lagrange dimostrare che:

(1) $e^x \geq 1 + x$

(2) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$ per $b > a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$

Esercizio 7 Verificare il teorema di Cauchy per le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Esercizio 8 Dimostrare le seguenti identità:

(1) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Esercizio 9 Calcolare i seguenti limiti utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln \cos x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sinh x - \sin x)^2}{(\cosh x - \cos x)^3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-x} - 1}{x}$$

Esercizio 10 Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$(1) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{7}{4}x^4 + 3x^3$$

$$(3) f(x) = \frac{(3-x^2)^2}{4-2x^2}$$

$$(4) f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$

$$(5) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$(6) f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

$$(7) f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$$

$$(8) f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$(9) f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \cos^2 x}$$

$$(10) f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$$

$$(11) f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$(12) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(13) f(x) = \frac{2|x| - x^2 - x}{x+1}$$