Am120 – Soluzioni Tutorato VI

Integrali funzioni razionali fratte e trigonometrici

Venerdì 9 Aprile 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 (1) <u>Seno:</u> per $n=1$ dobbiamo mostrare che

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c\,.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

da cui segue la tesi.

Ricordiamo che nel tutorato precedente abbiamo visto che, posto $S_n = \int \sin^n x dx$, si ha

$$S_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

Supponiamo ora che

$$\int \sin^{2n} x dx = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) x - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \sin^{2i-1} x \cos x + c$$

e mostriamo che è vera anche per $n+1$. Utilizzando la formula iterativa e l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned}\int \sin^{2(n+1)} x dx &= \int \sin^{2n+2} x dx = -\frac{1}{2n+2}\sin^{2n+1} x \cos x + \frac{2n+1}{2n+2}\int \sin^{2n} x dx = \\ &= -\frac{1}{2n+2}\sin^{2n+1} x \cos x + \frac{2n+1}{2n+2}\left[\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) x - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \sin^{2i-1} x \cos x\right] + c \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}\right) x - \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}\right) \sin^{2i-1} x \cos x + c\end{aligned}$$

cioè la tesi.

<u>Coseno:</u> per $n=1$ dobbiamo mostrare che

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c\,.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx$$

da cui segue la tesi.
Ricordiamo che nel tutorato precedente abbiamo visto che, posto $C_n = \int \cos^n x dx$, si ha

$$C_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}$$

Supponiamo ora che

$$\int \cos^{2n} x dx = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x + c$$

e mostriamo che è vera anche per $n+1$. Utilizzando la formula iterativa e l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2(n+1)} x dx = \int \cos^{2n+2} x dx &= \frac{1}{2n+2} \cos^{2n+1} x \sin x + \frac{2n+1}{2n+2} \int \cos^{2n} x dx = \\
&= \frac{1}{2n+2} \cos^{2n+1} x \sin x + \frac{2n+1}{2n+2} \left[\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x \right] + c \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x + c
\end{aligned}$$

cioè la tesi.

(2) <u>Seno:</u> utilizzando la relazione goniometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otteniamo

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin^{2n} x \sin x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^n \sin x dx$$

ora posto $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ si ha

$$\begin{aligned}
\int \left(1 - \cos^2 x\right)^n \sin x dx &= -\int \left(1 - t^2\right)^n dt \\
&= -\int \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} \right] dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int t^{2k} dt \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + c \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos^{2k+1} x + c
\end{aligned}$$

Coseno: utilizzando la relazione goniometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otteniamo

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos^{2n} x \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^n \cos x dx$$

ora posto $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ si ha

$$\begin{aligned}
\int \left(1 - \sin^2 x\right)^n \cos x dx &= \int \left(1 - t^2\right)^n dt \\
&= \int \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} \right] dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (-1)^k \int t^{2k} dt \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + c \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sin^{2k+1} x + c
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (1) Dato che $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ imponiamo che

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{x^2 - 5x + 6}$$

e quindi

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + 2B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 4 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} dx = -3 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{x-3} = -3 \ln|x-2| + 4 \ln|x-3| + c$$

(2) Dato che $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ imponiamo che

$$\frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{x^2 - 3x + 2}$$

e quindi

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} dx = -2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x-2} = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + c$$

(3) Dato che $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$ imponiamo che

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(C-2A)x+A-B+C}{x^3-x^2-x+1}$$

e quindi

$$\begin{cases}A+B=1\\-2A+C=0\\A-B+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/2\\B=1/2\\C=1\end{cases}$$

da cui

$$\int\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

(4) Imponiamo che

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+A-2B+2C}{(x+2)(x-1)^2}$$

e quindi

$$\begin{cases}A+B=1\\-2A+B+C=0\\A-2B+2C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4/9\\B=5/9\\C=1/3\end{cases}$$

da cui

$$\int\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx=\frac{4}{9}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{4}{9}\ln|x+2|+\frac{5}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+c$$

(5) Imponiamo che

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C}{(x-1)^3}$$

e quindi

$$\begin{cases}A=1\\-2A+B=0\\A-B+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\\C=3\end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$$

(6) Dato che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ imponiamo che

$$\frac{x^2+4x+4}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C}{x^3-1}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=4 \\ A-C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x^3-1}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = 3\ln|x-1| - \ln(x^2+x+1) + c$$

(7) Dato che $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)^2$ imponiamo che

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(A+B)x^4 + (-B+C)x^3 + (2A+B-C+D)x^2 + (-B+C-D+E)x + A - C - E}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ 2A+B-C+D=2 \\ -B+C-D+E=0 \\ A-C-E=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \\ E=0 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

(8) Imponiamo che

$$\frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 - (2B-C)x + A - 2C}{(x-2)(1+x^2)}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2B-C=0 \\ A-2C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3/5 \\ B=2/5 \\ C=4/5 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)}dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int \frac{2x+4}{x^2+1}dx = \frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{4}{5}\arctan x + c$$

(9) Imponiamo che

$$\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{(A+B)x^2+(5B+C)x+9A+5C}{(x+5)(x^2+9)}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 5B+C=11 \\ 9A+5C=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-4 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}dx = 2\int \frac{dx}{x+5} + \int \frac{3x-4}{x^2+9}dx = 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}dx - 4\int \frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$$

(10) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^4+6x^2+9}}dx = \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)^2}}dx = \int \frac{2x}{x^2+3}dx = \ln(x^2+3) + c$

Esercizio 3 Dato che $1+x^4 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ si ha che

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{Cx+D}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}$$

da cui si ottiene che $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad B = \frac{1}{2}$ $\quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad D = \frac{1}{2}$. Si ha quindi:

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + c$$

Esercizio 4 (1) Aggiungendo e sottraendo x^2 al numeratore si ottiene

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

dai cui, integrando per parti con $f' = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ $\quad g = x$ si ha

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \arctan x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + c$$

(2) Consideriamo I_{n-1}: integrando per parti con $f = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$ $\quad g' = 1$, si ha

$$I_{n-1}=\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}dx=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+2\left(n-1\right)\int\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n}}dx=$$

$$=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+2\left(n-1\right)\int\frac{1+x^2-1}{\left(1+x^2\right)^{n}}dx=$$

$$=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+2\left(n-1\right)\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}dx-2\left(n-1\right)\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n}}dx=$$

$$=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+2\left(n-1\right)I_{n-1}-2\left(n-1\right)I_n$$

da cui la tesi.

(3a) Utilizzando il metodo del completamento del quadrato otteniamo

$$\int\frac{1}{\left(7x^2+4x+3\right)^3}dx=\int\frac{1}{\left[\left(\sqrt{7}x+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2+\frac{17}{7}\right]^3}dx=\left(\frac{7}{17}\right)^3\int\frac{1}{\left[\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2+1\right]^3}dx$$

ora posto $t=\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}$ e quindi $dt=\frac{7}{\sqrt{17}}dx$ si ha

$$\left(\frac{7}{17}\right)^3\int\frac{1}{\left[\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2+1\right]^3}dx=\left(\frac{7}{17}\right)^3\frac{\sqrt{17}}{7}\int\frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}dt$$

utilizzando quindi la formula dell'esercizio precedente si ottiene

$$\left(\frac{7}{17}\right)^3\frac{\sqrt{17}}{7}\int\frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}dt=\left(\frac{7}{17}\right)^3\frac{\sqrt{17}}{7}\left(\frac{3}{8}\arctan t+\frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{4}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}+k\right)=$$

$$=\left(\frac{7}{17}\right)^3\frac{\sqrt{17}}{7}\left(\frac{3}{8}\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}\right)+\frac{3}{8}\frac{\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}}{\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2+1}+\frac{1}{4}\frac{\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}}{\left[\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2+1\right]^2}\right)+c$$

(3b) Analogamente a prima si ha

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+2\right)^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^4}dx + \int \frac{1}{\left(x^2+2\right)^4}dx =$$

$$= -\frac{1}{6\left(x^2+2\right)^3} + \frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]^4}\frac{dx}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{6\left(x^2+2\right)^3} + \frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^4}dt$$

dalla formula dell'esercizio precedente si ottiene

$$\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^4}dt = \frac{5}{16}\arctan t + \frac{5}{16}\frac{t}{t^2+1} + \frac{5}{24}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{1}{6}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^3} + k$$

e quindi

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2+2\right)^4}dx = \frac{5\sqrt{2}}{256}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{128}\frac{x}{x^2+2} + \frac{5}{96}\frac{x}{\left(x^2+2\right)^2} + \frac{1}{12}\frac{x-2}{\left(x^2+2\right)^3} + c$$

Esercizio 5 Osserviamo, prima di svolgere gli integrali, che $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow 2\arctan t = x \Rightarrow \frac{2dt}{1+t^2} = dx$.
Inoltre, dal suggerimento, si ottiene facilmente che:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(1)

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{2t}{t^2+2t+1}dt$$

$$= \int \frac{2t+2}{t^2+2t+1}dt - 2\int \frac{1}{t^2+2t+1}dt$$

$$= \ln\left(t^2+2t+1\right) + \frac{2}{t+1} + c$$

$$= \ln\left(\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 1\right) + \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c$$

(2)

$$\int \frac{1}{3\sin x+4\cos x}dx=\int \frac{1}{3\dfrac{2t}{1+t^2}+4\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int \frac{1}{\dfrac{6t+4-4t^2}{1+t^2}}dt=\int \frac{1+t^2}{6t+4-4t^2}dt$$

$$=-4\int dt+\int \frac{6t+8}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)(t-2)}dt$$

$$=-4t-2\int \frac{dt}{t+\dfrac{1}{2}}+8\int \frac{dt}{t-2}$$

$$=-4t-2\ln\left|t+\frac{1}{2}\right|+8\ln|t-2|+c$$

$$=-4\tan\frac{x}{2}-2\ln\left|\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right|+8\ln\left|\tan\frac{x}{2}-2\right|+c$$

(3)

$$\int \frac{\tan x}{1-\cos x}dx=\int \frac{\dfrac{2t}{1-t^2}}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int \frac{\dfrac{2t}{1-t^2}}{\dfrac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}dt=\int \frac{dt}{t(1-t)(1+t)}=$$

$$=\int \frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t}$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\ln|1+t|+c$$

$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+c$$