Am120 – Soluzioni Tutorato VII

Integrazione funzioni irrazionali, integrali definiti

Mercoledì 28 Aprile 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Tramite le sostituzioni suggerite si ottiene:

(1) $x = a\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\cos t dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} a\cos t dt = \int dt = t + k = \arcsin\frac{x}{a} + k$$

(2) $x = a\sinh t \Rightarrow t = \sinh^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\cosh t dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2\sinh^2 t}} a\cosh t dt = \int dt = t + k = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + k = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + k$$

(3) $x = a\cosh t \Rightarrow t = \cosh^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\sinh t dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2}} a\sinh t dt = \int dt = t + k = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + k = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + k$$

(4) $x = a\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\cos t dt$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a\cos t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} dt = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + k =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right) + k$$

(5) $x = a\sinh t \Rightarrow t = \sinh^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\cosh t dt$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \int a\cosh t\sqrt{a^2 + a^2\sinh^2 t} dt = a^2\int \cosh^2 t dt$$

Si ricava facilmente, integrando per parti, che $\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\cosh t\sinh t + t) + k$ e quindi

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2}\right)+k = \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+k$$

(6) $x = a\cosh t \Rightarrow t = \cosh^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\sinh t dt$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int a\sinh t\sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2}\,dt = a^2\int \sinh^2 t dt$$

come prima, integrando per parti, si ha $\int \sinh^2 t dt = \frac{1}{2}(\cosh t\sinh t - t)+k$ e quindi

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{x^2-a^2}-\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right)+k = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+k$$

Esercizio 2 Calcolare i seguenti integrali irrazionali:

(1) Posto $x = t^{12} \Rightarrow t = \sqrt[12]{x} \Rightarrow dx = 12t^{11}dt$ si ha

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{1-t^4}{t^6+t^3}12t^{11}dt =$$
$$= -\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}+12\sqrt[12]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+1\right)-4\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{3}}+k$$

(lo svolgimento dell'integrale di funzione razionale viene omesso)

(2) Posto $x+1 = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x+1} \Rightarrow dx = 6t^5dt$ si ha

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^3+t^2}6t^5dt = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+k$$

(3) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{(2x-3)^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,dz = \ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+k =$$
$$= \ln\left|2x-3+\sqrt{(2x-3)^2-1}\right|+k$$

(4) $$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{-2x+1}{\sqrt{-x^2+x+2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}\,dx\right) =$$
$$= -\sqrt{-x^2+x+2}+\int \frac{1}{\sqrt{9-(2x-1)^2}}\,dx = -\sqrt{-x^2+x+2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{3}+k$$

(5) $$\int \sqrt{x^2+4x+13}\,dx = \int \sqrt{(x+2)^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\left[9\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right)+(x+2)\sqrt{x^2+4x+13}\right]+k$$

(6) $\int \sqrt{-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int \sqrt{5-(2x+1)^2}\,dx=\frac{1}{8}\left[5\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+(2x+1)\sqrt{-x^2-x+1}\right]+k$

(7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx+2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx=$

$$=\sqrt{x^2+2x+10}+2\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+9}}dx=\sqrt{x^2+2x+10}+2\ln\left(\frac{x+1}{3}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\right)+k$$

(8) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}dx$

ora posto $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$ si ottiene

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{t+1}{\sqrt{-t^2+3t-2}}dt=-\frac{1}{4}\int \frac{-2t+3}{\sqrt{-t^2+3t-2}}dt+\frac{5}{4}\int \frac{1}{\sqrt{-t^2+3t-2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{-t^2+3t-2}+\frac{5}{4}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2t-3)^2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{-x^4+3x^2-2}+\frac{5}{4}\arcsin\left(2x^2-3\right)+k$$

Esercizio 3 (1) Dato che $|x-2|=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$ si ha che

$$\int_1^3 |x-2|\,dx=\int_1^2 (2-x)\,dx+\int_2^3 (x-2)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{x=2}^{x=3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(2) Dato che $|\sin x|=\begin{cases} \sin x & 0\leq x\leq \pi \\ -\sin x & \pi<x<2\pi \end{cases}$ si ha che

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx=\int_0^{\pi} \sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{2\pi}=2+2=4$$

(3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{1}{2}\ln^2 2$

(4) Integrando per parti si ottiene

$$\int_2^3 \ln\left(x^2-x\right)dx = \left[x\ln\left(x^2-x\right)\right]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{2x^2-x}{x^2-x}dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_2^3 \frac{2x^2-2x+x}{x^2-x}dx =$$

$$= 3\left(\ln 3+\ln 2\right) - 2\ln 2 - \int_2^3 2 + \frac{x}{x\left(x-1\right)}dx = 3\ln 3 + \ln 2 - 2\left[x\right]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{dx}{x-1} =$$

$$= 3\ln 3 + \ln 2 - 2 - \left[\ln\left|x-1\right|\right]_{x=2}^{x=3} = 3\ln 3 + 2$$

(5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_0^3 \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}dx = \int_0^3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt[2]{\left(x+1\right)^3} - 2\sqrt{x+1}\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

(6) Tramite la sostituzione $x=\cos t$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{1+\cos t}\sin t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1+\cos t}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1-\cos t\right)\left(1+\cos t\right)}{1+\cos t}dt = \int_0^{\pi/2}\left(1-\cos t\right)dt = \left[t-\sin t\right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1$$

Esercizio 4 (a) Supponiamo per assurdo che $f\left(x\right)\geq 3 \quad \forall x\in\left[0;5\right]$. Allora, dalla monotonia dell'integrale segue che

$$\int_0^5 f\left(x\right)dx \geq \int_0^5 3dx = 15$$

da cui l'assurdo.

(b) Dal teorema della media esiste $x_0\in\left[0;5\right]$ tale che $5f\left(x_0\right)=\int_0^5 f\left(x\right)dx = 10$ cioè $f\left(x_0\right)=2$.

(c) Supponiamo, ad esempio, che $f\left(x\right)$ è strettamente crescente nell'intervallo $\left[0;5\right]$ e che per assurdo $f\left(x\right)\geq 2 \quad \forall x\in\left[0;5\right]$. Per ipotesi $f\left(x\right)\not\equiv 2$ pertanto scelto $x_1\in\left(0;5\right)$ si ha che $f\left(x\right)>f\left(x_1\right)>f\left(0\right)\geq 2 \quad \forall x\in\left(x_1;5\right)$. Si ha quindi:

$$10=\int_0^5 f\left(x\right)dx = \int_0^{x_1} f\left(x\right)dx + \int_{x_1}^5 f\left(x\right)dx > 2\int_0^{x_1} dx + f\left(x_1\right)\int_{x_1}^5 dx = 2x_1+\left(5-x_1\right)f\left(x_1\right) > 2x_1 + 2\left(5-x_1\right)=10$$

Esercizio 5 Sia $y=r$ l'equazione della retta parallela all'asse *x*. Si ricava facilmente che la parabola interseca la retta nei punti di ascisse $x=\pm\sqrt{\frac{r}{a}}$. Pertanto l'area del segmento parabolico è

$$A=\int_{-\sqrt{\frac{r}{a}}}^{\sqrt{\frac{r}{a}}}\left(r-ax^2\right)dx=\left[rx-\frac{a}{3}x^3\right]_{x=-\sqrt{\frac{r}{a}}}^{x=\sqrt{\frac{r}{a}}}=\frac{4}{3}r\sqrt{\frac{r}{a}}$$

Dato che l'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico è $S=2r\sqrt{\frac{r}{a}}$ segue che

$$\frac{A}{S}=\frac{\frac{4}{3}r\sqrt{\frac{r}{a}}}{2r\sqrt{\frac{r}{a}}}=\frac{2}{3}$$

cioè la tesi.

Esercizio 6 Chiamiamo A l'area cercata. Le due parabole si intersecano nel punto di ascissa $x=0$ e hanno il vertice sull'asse x rispettivamente nei punti di ascissa $x=-2$ e $x=2$. Poiché per $-2<x<0$ l'area cercata è delimitata da p_1 e l'asse x mentre per $0<x<2$ è delimitata da p_2 e l'asse x si ha che

$$A=\int_{-2}^{0}\left(x^2+4x+4\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^2-4x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{x=-2}^{x=0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

Esercizio 7 (a) Dal cambio di variabile $t=-y$ si ha

$$F(-x)=\int_{0}^{-x}f(t)dt=-\int_{0}^{x}f(-y)dy=-F(x)$$

(b) Dal cambio di variabile $t=-y$ si ha

$$F(-x)=\int_{0}^{-x}f(t)dt=-\int_{0}^{x}f(-y)dy=F(x)$$

Esercizio 8 La funzione $f(x)=\sin x+1$ è ovviamente periodica di periodo 2π tuttavia $F(x)$ non lo è. Infatti

$$F(x)=\int_{0}^{x}(\sin t+1)dt=\left[-\cos t+t\right]_{t=0}^{t=x}=-\cos x+x+1$$

che non è periodica.
Per trovare condizioni necessarie e/o sufficienti affinché ciò accada ragioniamo nel seguente modo: vogliamo che se f è T-periodica allora $F(x)=F(x+T)$ $\forall x$ o equivalentemente

$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{x+T} f(t)dt$ e quindi $\int_x^{x+T} f(t)dt = 0$. Cioè $f(x)$ deve avere "media nulla". Pertanto se f è T-periodica allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ é T-periodica $\Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)dt = 0$.