AM2: Tracce delle lezioni- II Settimana

ELEMENTI DI TOPOLOGIA DI $\mathbf{R}^n$

1. $O \subset \mathbf{R}^n$ si dice **aperto** se $\forall u \in O \ \exists r > 0 : \ D_r(u) \subset O$.
Indicheremo con $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti di $\mathbf{R}^n$.
Esempio.
Se $f \in C(\mathbf{R}^n)$ allora $\{x : \ f(x) < c\}$ é aperto per ogni $c \in \mathbf{R}$. In particolare, $B_r(0) = \{x : \|x\| < r\}$ é un insieme aperto, perché la funzione $x \to \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ é continua (ció segue anche dal fatto che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$). Piú in generale,

2. $$f \in C(\mathbf{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad (\quad O \in \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(O) \in \mathcal{O} \quad).$$

$\Rightarrow$: sia $x \in f^{-1}(O)$, ovvero $f(x) \in O$ e quindi $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ per un $\epsilon > 0$. Ma, per continuitá, esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset O$ e quindi $B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.
$\Leftarrow$: $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ aperto $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ che dice appunto che f é continua in x.

3. $F \subset \mathbf{R}^n$ si dice **chiuso** se F' (il complementare di F) é aperto
Ad esempio, $f \in C(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \{x : \ f(x) \leq c\}$ é chiuso per ogni $c \in \mathbf{R}$. In particolare, una palla chiusa é un insieme chiuso.

4. (i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\quad \Rightarrow \quad \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$
(ii) Ogni aperto é unione numerabile di palle aperte (o chiuse)

(iii) Se $O_\alpha \in \mathcal{O}$, esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_j O_{\alpha_j}$

Prova. (i) $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \Rightarrow \exists \, \overline{\alpha}, \exists D_r(x) : \quad x \in D_r(x) \subset O_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha$.
Poi, se $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$ esistono $D_\alpha(x) \subset O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_0$ e $D(x) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} D_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$
(ii) Sia $\mathcal{D}_O := \{D_r(x) \subset O : \quad r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}$; $\mathcal{D}_O$ é numerabile. É $O = \bigcup_{D \in \mathcal{D}_O} D$.
Infatti, se $D_{3r}(\hat{x}) \subset O$, allora $\hat{x} \in D_q(x) \in \mathcal{D}_O$ ove $q \in (r, 2r)$ e $\|x - \hat{x}\| < r$.
(iii) Sia $\mathcal{D}_\alpha := \mathcal{D}_{O_\alpha}$, $\quad O := \cup O_\alpha$. La famiglia $\mathcal{D} := \bigcup_\alpha \mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_O$ é numerabile. Indicata $\mathcal{D} = \{D_j : \ j \in \mathbf{N}\}$, sia $D_j \subset O_{\alpha_j}$. Allora $O = \cup_j D_j \subset \cup_j O_{\alpha_j} \subset O$.

5. (i) F_α chiusi, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\quad \Rightarrow \quad \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ e $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha$ sono chiusi

(ii) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** $\quad \Leftrightarrow \quad (u_k \in F, \ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$

Prova.

(i) $\left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

(ii) $\Rightarrow$: $u \notin F \Rightarrow \exists r > 0 : D_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap D_r(u)$ definitivamente.

$\Leftarrow$: Per assurdo, esista $u \in F'$ tale che : $D_r(u) \cap F$ é non vuoto per ogni $r > 0$, e quindi $\forall k, \ \exists\ u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F$. Ma $u_k \in F \cap D_{\frac{1}{k}}(u) \Rightarrow u_k \to_k u \Rightarrow u \in F$.

6. $B \subset \mathbf{R}^n$ si dice **limitato** se esiste $r > 0 : B \subset D_r$

7. $K \subset \mathbf{R}^n$ si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito: cioé, se $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in \mathcal{A}$,

$$K \subset \bigcup_\alpha O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \quad \textit{tali che} \quad K \subset \bigcup_{j=1,\ldots,l} O_{\alpha_j}$$

PROPOSIZIONE 1 Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) K é chiuso e limitato

(ii) $x_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists x_{k_j}, x \in K$ tali che $x_{k_j} \to_j x$

(iii) K é compatto

Prova.(i) $\Rightarrow$ (ii): $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty$ per tutti i $j = 1, \ldots, n \Rightarrow \exists k_i, \ \exists\ x_1, \ldots, x_n : \ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \ldots, n \Rightarrow u_{k_i} \to_i u$ $u = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ perché K é chiuso.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Dal punto 3-(iii) sappiamo che possiamo supporre $\mathcal{A} = \mathbf{N}$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $k \in \mathbf{N}$ esista $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k} O_i$. Sia $x_{k_j} \to_j x \in K$. Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, esiste k_0 tale che $x \in O_{k_0}$ e quindi $x_{k_j} \in O_{k_0}$ per j grande, mentre $x_{k_j} \notin O_i$ se $i \leq k_j$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, ove D_i é la palla di raggio $i \in \mathbf{N}$ e centro l'origine, $K \subset D_{\hat{i}}$ per qualche $\hat{i}$. Proviamo ora che K' é aperto. Sia $\hat{x} \notin K$ e quindi $K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\} = \bigcup_k \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\}$ e quindi

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} \{x : \|x - \hat{x}\| > \tfrac{1}{k}\} == \{x : \|x - \hat{x}\| > \tfrac{1}{N}\}. \quad \text{Dunque} \quad B_{\frac{1}{N}}(\hat{x}) \subset K'$$

TEOREMA $f \in C(K, \mathbf{R}^m)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ é compatto.
In particolare , se $m = 1$, esistono $\underline{u}$, $\overline{u} \in K$: $\inf_K f = f(\underline{u})$, $f(\overline{u}) = \sup_K f$.

Prova. $y_j = f(x_j), x_j \in K, j \in \mathbf{N}$, K compatto $\Rightarrow \exists x_{j_k}, x \in K$ tale che $x_{j_k} \to_k x$. Ma f continua $\Rightarrow y_{j_k} = f(x_{j_k}) \to_k f(x)$. Dunque $f(K)$ é compatto.

Variante di Weierstrass Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F)$ tale che
(i) **(coercivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \Rightarrow f(u_n) \to_n +\infty$
(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \Rightarrow \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

Allora $\exists\, \underline{u} \in C$ tale che $f(\underline{u}) = \inf\limits_C f$

Infatti, se $u_n \in C, f(u_n) \to_n \inf\limits_C f$, allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue $\inf\limits_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u)$.

Definizione $f : A \to \mathbf{R}^m$ é **uniformemente continua** (UC) in $A \subset \mathbf{R}^n$
sse $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 :$ $(u, v \in E,\ ||u - v|| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| \leq \epsilon)$

ESEMPIO Le funzioni **Lipschitziane**: $f \in Lip(E, \mathbf{R}^m)$, $E \subset \mathbf{R}^n$ se

$$\exists L > 0 : \quad \|f(u) - f(v)\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in E$$

(**Heine-Cantor**) $f \in C(K, \mathbf{R}^m)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto $\Rightarrow$ f é UC in K.

Prova. Se no, $\exists \epsilon_0 > 0,\ u_n, v_n \in K,\ ||u_n - v_n|| \leq \frac{1}{n} :$ $\|f(u_n) - f(v_n)\| \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $\|f(u) - f(v)\| \geq \epsilon_0$. Ma $||u - v|| \leq ||u - u_n|| + ||u_n - v_n|| + ||v_n - v||$ $\forall n \Rightarrow u = v$, contraddizione.

CONNESSIONE

$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso per archi** se $\forall\, u, v \in A$, esiste un **cammino continuo** $\gamma \in C([0, 1], A)$ tale che : $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$.

Proposizione. $f \in C(E, \mathbf{R}^m)$, $E \subset \mathbf{R}^n$ connesso per archi $\Rightarrow f(E)$ connesso per archi. Se $m = 1$, $f(E)$ é un intervallo (f ha la proprietá del valore intermedio).

Prova. Siano $y_i = f(x_i), x_i \in E$. Se $\gamma \in C([0, 1], E)$ con $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$, allora $\hat{\gamma} := f \circ \gamma \in C([0, 1], f(E))$ e $\hat{\gamma}(0) = y_1, \hat{\gamma}(1) = y_2$. Infine, se $m = 1$, $\hat{\gamma} \in C([0, 1], \mathbf{R})$ e quindi (teorema del valore intermedio) $\hat{\gamma}([0, 1])$ é un intervallo.

LIMITI PER FUNZIONI REALI DI PIÚ VARIABILI REALI

Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $\dot{D}_r(u) = D_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{D}_r(u_0) \cap A \neq \emptyset \forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f \ = \ l \ \Leftrightarrow \ (\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \ u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f \ = +\infty \ \Leftrightarrow \ (\forall M > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \ u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ f(u) \geq \ M)$$

Se $D'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f \ = \ l \ \Leftrightarrow \ (\forall \epsilon > 0, \ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \ \ u \in A, \ ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f \ = +\infty \ \Leftrightarrow \ (\forall M > 0, \ \exists R_M > 0 : \ \ u \in A, \ ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq \ M)$$

Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$

$$(u_n \in A, \ u_n \neq u_0, \ u_n \to u_0 \ \ (|u_n| \to +\infty\ ) \ \Rightarrow \ f(u_n) \to \ l)$$

(ii) (**Cauchy**) f ha *limite finito* l per u tendente a u_0 $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \ u, v \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists R_\epsilon > 0 : \ \ u, v \in A, \ |u|, |v| \geq R_\epsilon \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

DUE ESEMPI . **(i)** Sia $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) \ = \ f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) \ = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) \ = \ 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x, x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

1. Se $\mathcal{F}_A$ é la classe dei chiusi contenenti A, $\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ si dice **chiusura** di A.
$\overline{A}$ é il piú piccolo chiuso contenente A e $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\, x_j \in A : \quad x_j \to_j x.$

Prova. Sia $x \in \overline{A}$ e supponiamo, per assurdo, che non ci sia $x_j \in A$ tale che $x_j \to x$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $(B_r(x))'$, essendo un chiuso contenente A, contiene $\overline{A}$, che contiene x: assurdo. Viceversa, se $x_j \in A : \quad x_j \to_j x$ e F é un chiuso contenente A, allora $x \in F$ e quindi, per l'arbitrarietá di F, $x \in \overline{A}$.

2. La **frontiera** di E é l'insieme $\partial E := \{x : B_r(x) \cap E \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap E\}$.

3. $\partial E = \partial E'$ e $\overline{E} = E \cup \partial E$.

4. Se O é aperto in $\mathbf{R}^n$ e $\gamma \in C([0,1], \mathbf{R}^n)$ tale che $\gamma(0) \in O$ e $\gamma(1) \notin O$, allora esiste $t \in (0,1)$ tale che $\gamma(t) \in \partial O$.

Infatti, $I := \{t \in [0,1] : \gamma(s) \in O \quad \forall s < t\}$ contiene, per continuitá, $t = 0$. Posto $\bar{t} := \sup I$, risulta $\gamma(\bar{t}) \in \partial O$. Intanto, $\gamma(\bar{t}) \notin O$ perché, altrimenti $\gamma(t) \in O$ per $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ per un $\delta > 0$. Poi, $\gamma(t_n) \in O$ e $t_n < \bar{t}$ e quindi, se $t_n \to_n \bar{t}$, $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O}$. Dunque $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O} \setminus O = \partial O$.

5. Sia $f : E \to \mathbf{R}$. f si dice *localmente costante in E* se

$$\forall x \in E, \quad \exists B_r(x) \quad \text{tale che} \quad f \text{ é costante in } B_r(x) \cap E$$

Notiamo che una funzione siffatta é necessariamente continua in E.

6. **f localmente costante in E connesso per archi $\Rightarrow$ f é costante in E.**
Prova. Sia, per ogni $x \in E$, $B_{r(x)}(x)$ tale che f sia costante in $B_{r(x)}(x)$. Siano $x, y \in E$ e sia γ cammino da x a y. Notiamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un intervallo, perché $f \circ \gamma$ é continua. Estraendo da $\{B_{r(x)}(x) : \quad x \in \gamma([0,1])\}$, ricoprimento aperto del compatto $\gamma([0,1])$, un sottoricoprimento finito, deduciamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un insieme finito di punti, che, trattandosi di un intervallo, deve ridursi a un punto.

7. Una $f \in C(E, \mathbf{R}^m)$ é $Lip_{loc}(E)$ se $\forall x \in E$, $\exists B_{r(x)}(x)$ tale che $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$.

8. $Lip_{loc}(K)$, K compatto $\Rightarrow$ $f \in Lip(K)$. Se no, $\exists x_j, y_j \in K$: $\|f(x_j) - f(y_j)\| \; \|x_j - y_j\|^{-1} \to +\infty$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $x_j \to_j x \in K, y_j \to_j y \in K$. Siccome f é limitata, necessariamente $\|x_j - y_j\| \to 0$ e quindi $x = y$. Ma $x_j, y_j \in B_{r(x)}(x)$ per j grande e $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$, contraddizione.