AM2: Tracce delle lezioni- IV Settimana

Il TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, O aperto convesso in $\mathbf{R}^n$. Allora

$$|f(u) - f(v)| \ \leq \ ||u - v|| \ \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Infatti $$|f(u) - f(v)| \ = \ |\int_0^1 [\frac{d}{dt} f(v + t(u - v))] \ dt| \ =$$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u - v)), u - v > \ dt| \ \leq \ ||u - v|| \ \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Corollario 1 Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso per archi. Allora

$$\nabla f(u) \ = \ 0 \ \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{ cost. } \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Fissati $u, v \in O$, sia $\gamma \in C([0,1], O), \gamma(0) = u, \gamma(1) = v$. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi. Siccome $\gamma([0,1])$ é compatto, puó essere ricoperto con un numero finito di dischi, su ciascuno dei quali f é costante. Dunque $f \circ \gamma$ assume un numero finito di valori, e quindi esattamente uno perché $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un intervallo.

Corollario 2. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f é **localmente Lipschitziana** in O:

$$\forall \ B_r(x_0) \subset O, \exists L = L(r, x_0) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall \, x, y \in B_r(x_0)$$

Prova. Intanto, dal Teorema del valor medio

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \sup_{z \in B_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\| \quad \|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Quindi, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \leq \quad \|x - y\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right| \right]^2$$

Corollario 3. $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ é Lipschitziana sui compatti di O :

$$\forall K \subset O \text{ compatto } \ \exists L = L(K) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in K$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se f_{x_j} sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

sono le derivate seconde.

Se $f_{x_i x_j} \in C(O)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, f si dice di classe $C^2(O)$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad \forall x \in O$$

Prova. Sia, per semplicitá, $n = 2, (0,0) \in O$. Per $\delta > 0$ piccolo, sia:

$$I_\delta := \int_0^\delta \left(\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx = \int_0^\delta [\frac{\partial f}{\partial x}(x, \delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)]\, dx =$$

$$[f(\delta, \delta) - f(0, \delta) - f(\delta, 0) + f(0,0)] =$$

$$\int_0^\delta [\frac{\partial f}{\partial y}(\delta, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)]\, dy = \int_0^\delta \left(\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \right) dy$$

Siccome $x \to \int_0^\delta f_{yx}(x, y)\, dy$ é continua, per il teorema della media

$$\exists x_\delta \in [0, \delta] : \quad I_\delta = \int_0^\delta \left(\int_0^\delta f_{yx}(x, y)\, dy \right) dx = \delta \left(\int_0^\delta f_{yx}(x_\delta, y)\, dy \right)$$

Ancora dal teorema della media: $\exists y_\delta \in [0, \delta] : \quad I_\delta = \delta^2 f_{yx}(x_\delta, y_\delta)$ e quindi

$$\frac{I_\delta}{\delta^2} \to_{\delta \to 0} f_{yx}(0,0)$$

Analogamente,

$$\exists (x^\delta, y^\delta) \in [0, \delta] \times [0, \delta] : \quad \frac{I_\delta}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta \left(\int_0^\delta f_{xy}(x, y)\, dy \right) dx = f_{xy}(x^\delta, y^\delta) \to_\delta f_{xy}(0,0)$$

MATRICE HESSIANA

Sia $f \in C^2(O)$ ed indichiamo con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i punti di $\mathbf{R}^n$. La matrice $n \times n$ delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(u) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

é detta matrice Hessiana.

Dal Lemma di Schwartz: H_f é **matrice simmetrica**.

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \; = \; f(u) + \; < \nabla f(u) \; , \; h > \; + \frac{1}{2} < H_f(u) \, h, \; h > \; + \; \circ \, (||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := \; f(u+th)$, é

$$\varphi(0) \; = \; f(u), \quad \varphi(1) \; = \; f(u+th)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(u+th) \;\; = \;\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th) h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(u+th) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \, \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j \; = \; \sum_{j=1}^{n} \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u+th)h_i h_j \;\; =$$

$$= < H_f(u \; + \; t \, h) \, h, \; h >$$

Ma $\qquad \varphi(1) \; = \; \varphi(0) \; + \; \varphi'(0) \; + \; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) \, dt \quad$ e quindi

$$f(u+h) \;\; = \;\; f(u) \; + < \nabla f(u) \; , \; h > \; + \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > \; +$$

$$+ \int_0^1 (1-t) \;\; < \; [H_f(u+th) \; - \; H_f(u)] \, h, h > \;\; dt$$

Stima del resto: $\quad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta_\epsilon > 0 : \; |t| \leq \delta_\epsilon \; \Rightarrow \; |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \leq \epsilon \Rightarrow$

$$| \sum_{i,j=1}^{n} \; \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right] \; h_i h_j \; | \; \leq n^2 \epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \ f(u) \leq f(v) \ \ \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\ h > \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \leq \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \leq f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 = \tfrac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} = < \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\quad \nabla f(u) = 0, \quad 0 \leq f(u+h) - f(u) =$

$$\nabla f(u) + ||h||^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > + \circ(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > \geq 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:

$$< H_f(u)\, h, h > \ > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale}$$

Prova. $h \to < H_f(u) h, h >$ continua, $< H_f(u) h, h > \ > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \ \Rightarrow$

$$\exists\, m := \min_{\|h\|=1} < H_f(u)\, h, h > \ > 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \ \geq \ m \, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| << 1 \ \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) = \|h\|^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > + \circ(1)] \ \geq \ \|h\|^2 \, [m + \circ(1)] \ > 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \ f(u) \geq f(v) \ \ \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $\quad < H_f(u)\, h,\ h > \leq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \ < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0$$

Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \dots, x_n)$ di f dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > \ = \ \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \ = \qquad\qquad h = (h_1, \dots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Le proprietá di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\dots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n\times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ h,\ h >:= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n \qquad\qquad \text{si dice}$$

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > > \ 0\,(< 0),\ \ \forall\, h \neq (0,0)$
semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > \geq \ 0\,(\leq 0),\ \ \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$$

Prova. Sia $\overline{h}$ di norma 1 tale che $m := < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >= \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h >$.
Sia $f(h) = \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2}$, $h \neq 0$. Per linearitá, $f(\overline{h}) = \min_{h\neq 0} f(h)$ e quindi $\nabla f(\overline{h}) = 0$, perché f é differenziabile in $h \neq 0$. E infatti

$$\nabla f(h) = 2\frac{\mathcal{A}h}{\|h\|^2} - 2\frac{< \mathcal{A}h, h > h}{\|h\|^4}$$

perché $\nabla < \mathcal{A}h, h >= 2\mathcal{A}h$ e $\nabla \|h\|^{-2} = -2\frac{h}{\|h\|^4}$. Dunque

$$0 = \nabla f(\overline{h}) = 2\mathcal{A}\overline{h} - 2 < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \overline{h}$$

e quindi $\mathcal{A}\overline{h} =< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \overline{h} = m\overline{h}$. Dunque m é un autovalore di $\mathcal{A}$, necessariamente il piú piccolo, giacché $\mathcal{A}h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda \ =< \mathcal{A}h, h > \geq\ m$.

Corollario
(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0$ $(\lambda_n < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $(\lambda_n = 0)$

Esercizi e complementi

E 1. Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0. \qquad \text{É}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[(\alpha-2)x^2 + \alpha y^2]}{x\,(x^2+y^2)^2}, \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[\beta x^2 + (\beta-2)y^2]}{y\,(x^2+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Verificare che f é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta > 2$. Proviamo ora che

(i) esiste $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ $\forall\, h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(ii) f é differenziabile in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iii) $f \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha,\ \beta \geq 1$.

(i) $\alpha+\beta < 3 \ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3} f(x,y) \to_{x^2+y^2\to 0} +\infty$ (se $x^2+y^2 \neq 0$) e $\alpha+\beta = 3 \ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t} \to_{x^2+y^2\to 0} f(x,y)$ e quindi, se $\alpha+\beta \leq 3$, f non é derivabile, in $(0,0)$, nelle direzioni $h = (x,y) \neq (0,0)$. Invece, $\alpha+\beta > 3 \ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0\ \forall\, h \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Da (ii) segue che f non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.
Sia $\alpha + \beta > 3$.
Siccome $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$f \text{ é differenziabile in } (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Siccome

$$\alpha \geq 3, \quad \alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\,|y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

basta considerare il caso $\alpha,\ \beta \in (0,3)$. Posto $\tau := \frac{\alpha+\beta-3}{2}$ é allora $\tau \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$, $\alpha + \beta - 2\tau = 3$ e

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\frac{|x|^{\frac{2}{3}(\alpha-\tau)}\,|y|^{\frac{2}{3}(\beta-\tau)}}{x^2+y^2}\right]^{\frac{3}{2}} |x|^\tau\,|y|^\tau \leq |x|^\tau\,|y|^\tau \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

di nuovo in virtú di $(*)$.

(iii) Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Sia $\alpha + \beta > 3$.

Come in (i) $\alpha \geq 1, \quad \alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad |\frac{\partial f}{\partial x}| \leq \alpha \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^2+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$

mentre, se $\alpha \in (0,1)$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^{\gamma}, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)}\,[(\alpha-2)\,t^{2\gamma-2} + \alpha]}{(t^{2\gamma+2} + 1)^2} \rightarrow_{t\to 0^+} +\infty$$

Analogamente, $f_y \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$ sse $\alpha + \beta > 3$ e $\beta \geq 1$.

E 2. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$g(x,y) = \frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad g(0,0) = 0. \qquad \text{É}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}\,[(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2]}{x\,(x^4+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}\,[\beta x^4 + (\beta-2)y^2]}{y\,(x^4+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

Provare che

(i) g é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 4$
(ii) esiste $\frac{\partial g}{\partial h}(0,0) \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iii) g é differenziabile in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 5$ e $\alpha + \beta > 3$
(iv) $g \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 6$ e $\alpha, \beta \geq 1$.

(i) Se $\alpha + 2\beta < 4$, $g(tx, t^2y) = t^{\alpha+2\beta-4} g(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2 \neq 0$) e quindi g non é continua in $(0,0)$.
Sia dunque $\alpha + 2\beta > 4$.
Se $f(x,y) := \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}\,|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$ é $g(x,y) = f(x^2,y) \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$ perché $\frac{\alpha}{2} + \beta > 2$ (vedi l'esercizio 1) e quindi g é continua.

(ii) $\alpha + \beta < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(tx,ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3}\,\frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}}{t^2x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} +\infty$ e
$\alpha + \beta = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(tx,ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} \frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}}{y^2}$ (se $x^2+y^2 \neq 0$) e quindi,
$\alpha + \beta \leq 3 \quad \Rightarrow \quad f$ non é derivabile, in $(0,0)$, nelle direzioni $h = (x,y) \neq (0,0)$.
$\alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(tx,ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^2$.

(iii) Siccome $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$

$$g \text{ é differenziabile in } \quad (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Siccome $\alpha + 2\beta \leq 5 \;\Rightarrow\; \frac{g(t,t^2)}{\sqrt{t^2+t^4}} = t^{\alpha+2\beta-5}\,\frac{1}{2\,(1+t^2)}$ non tende a zero al tendere di t a zero, g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + 2\beta \leq 5$. Inoltre da (ii) segue che g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.

Sia dunque $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha + 2\beta > 5$. Da (i) e $(*)$ segue:

$$\alpha \geq 1,\ \alpha+2\beta > 5 \;\Rightarrow\; \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

$$\alpha < 1,\ \alpha+\beta > 3 \;\Rightarrow\; \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|^{\beta+\alpha-1}}{x^4+y^2}\left[\frac{|x|^{2\alpha}\,|y|^{2-2\alpha}}{x^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq |y|^{\alpha+\beta-3} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

(iv) Se $\alpha < 1$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^{\gamma},t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)}\ [(\alpha-4)\,t^{4\gamma-2} + \alpha)}{(t^{4\gamma-2} + 1)^2} \to_{t\to 0^+} +\infty$$

Se $\beta < 1$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t,t^{\gamma}) = \frac{t^{\alpha-4-\gamma(1-\beta)}\,[\beta + (\beta-2)t^{2\gamma-4}]}{(1 + t^{2\gamma-4})^2} \to_{t\to 0^+} +\infty$$

Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Inoltre, $\frac{\partial g}{\partial y}(t,t^2) = \frac{\beta-1}{2}\ t^{\alpha+2\beta-6}$ non tende a zero al tendere di t a zero se $\alpha + 2\beta \leq 6$ e quindi neanche in tal caso f ha derivate parziali continue in $(0,0)$.

Siano quindi $\alpha,\beta \geq 1$, $\alpha + 2\beta > 6$. Da (i) segue

$$|\frac{\partial g}{\partial x}| \leq \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2}\ \frac{(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2}{x^4 + y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

$$|\frac{\partial g}{\partial y}| \leq \beta\,\frac{|y|^{\beta-1}\,|x|^{\alpha}}{x^4 + y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

E 3. MASSIMI E MINIMI

1. Sia $\qquad f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

É $\qquad f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$

$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 1,0))$; $\det H(\pm 1,0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$; $(\pm 1,0)$

sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

2. Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Notiamo che $\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$ e quindi $(0,0),(1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi
$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3$ e quindi

- $H_f(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_f(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo, infatti il punto di minimo assoluto di g.

C 1. Provare che se $f \in Lip_{loc}(\Omega)$ allora f é Lipschitziana sui sottoinsiemi K compatti di Ω.

Supponiamo il contrario: esiste K ed esistono $x_j, y_j \in K$ tali che $\frac{\|f(x_j)-f(y_j)\|}{\|x_j-y_j\|} \to_j \infty$.
Siccome f é limitata in K, dovrá risultare $\|x_j - y_j\| \to_j 0$. Passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che

$$\exists \bar{x} \in K : \quad x_j \to_j \bar{x}, \quad y_j \to_j \bar{x}, \quad \frac{\|f(x_j) - f(y_j)\|}{\|x_j - y_j\|} \to_j \infty$$

contraddicendo la Lipschitzianitá in $B_r(\bar{x})$ per qualche $r > 0$.