AM2: Tracce delle lezioni- V Settimana

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $f \in C(K \times (a,b))$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Se f é **equidominata** in (a,b) (dominata uniformemente al variare di x in K), cioé

$$\exists g \in C((a,b)) : \quad |f(x,t)| \leq g(t) \quad \forall x \in K, t \in (a,b) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(t)dt < +\infty, \qquad \text{allora}$$

$$x \to \int_a^b f(x,t)\,dt \ \text{ é continua in } K : \quad \lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,dt \quad \forall x_0 \in K$$

Prova. Notiamo innanzi tutto che $\int_a^b |f(x,t)|\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt < +\infty \quad \forall x \in K$. Poi, fissato ϵ, da $\int_a^b g(t)\,dt < +\infty$ e dalla continuitá di f sul compatto $K \times [a_\epsilon, b_\epsilon]$ segue che esistono $a_\epsilon > a,\ b_\epsilon < b,\ \delta_\epsilon > 0$ tali che

$$\int_a^{a_\epsilon} g(t)dt + \int_{b_\epsilon}^b g(t)dt \leq \frac{\epsilon}{4} \quad \text{e} \quad |f(x,t) - f(\overline{x},t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b_\epsilon - a_\epsilon)} \forall t \in [a_\epsilon, b_\epsilon], \forall x \in K \cap B_{\delta_\epsilon}(\overline{x})$$

Quindi

$$\left| \int_a^b f(x,t) - f(\overline{x},t)\,dt \right| \leq 2\int_a^{a_\epsilon} g(t)dt + 2\int_{b_\epsilon}^b g(t)dt + \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f(x,t) - f(\overline{x},t)|\,dt \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

ESEMPIO 1 *(integrale di Dirichlet).* $f(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$, $t > 0$, $x \geq 0$, é equidominata in $(0,+\infty)$ per $x \geq \underline{x} > 0$:

$$|f(x,t)| \leq e^{-t\underline{x}} \quad \forall t > 0, \quad x \geq \underline{x} > 0 \qquad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t\underline{x}}dt = \frac{1}{\underline{x}} < +\infty$$

e quindi $\quad h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \quad$ é continua in ogni $x > 0$.
Non si puó affermare la continuitá in $x = 0$ perché manca l'equidominatezza, che comporterebbe, in particolare, $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} g dt < \infty$, mentre si sa che $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$. Proviamo con un argomento ad hoc la continuitá in $x = 0$.

Scriviamo $G(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau, \quad G(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$ e quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$. Notiamo anche che G é limitata: $\exists M$ tale che $\quad |G(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x \int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds \rightarrow_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

perché $\quad \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds \quad$ e
$|\int_0^\delta [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds| \leq 2M[1 - e^{-\delta}], \quad \int_\delta^\infty |G(\frac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon$ se $\frac{\delta}{x} \geq t_\epsilon$.
Concludiamo osservando che é anche

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \quad \rightarrow_{x\to +\infty} 0$$

perché $\quad |\int_0^\delta \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt| \leq \delta \quad$ e $\quad |\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt| \leq \int_\delta^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{e^{-\delta x}}{x} \rightarrow_{x\to +\infty} 0.$

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.

Sia $f \in C(B_r(x_0) \times (a,b)), \; -\infty \leq a < b \leq +\infty, \; x_0 \in \mathbf{R}^n$. Supponiamo che

$i)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad$ esiste ed é continua in $B_r(x_0) \times (a,b)$
$ii)$ $\quad \exists g \quad$ integrabile in $\quad (a,b): \quad |f(x,t)| + |f_{x_j}(x,t)| \leq g(x) \quad \forall t, x.$

Allora $\qquad x \rightarrow \int_a^b f(x,t)\, dt \quad$ é derivabile in $x_j \qquad \forall\, x \in B_r(x_0) \quad$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt$$

Prova. Sia $x \in B_r(x_0)$. Dal Teorema del valor medio: $\;\exists\, \tau = \tau(x,t,h) \in [0,1]$ tali che

$$\left| \frac{\int_a^b f(x + he_j, t) dt - \int_a^b f(x,t) dt}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau h e_j, t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \right| dt$$

La dimostrazione prosegue poi come nella prova della dipendenza continua.

ESEMPIO 1 *continuazione.* Sia $f(x,t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$.
Siccome f e $f_x = -\sin t e^{-tx}$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ sono continue ed equidominate in $[\underline{x}, +\infty) \times (0,\infty)$, é vero che $\frac{d}{dx} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t\, dt$.
Integrando per parti si ottiene

$$\frac{d}{dx} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt \;=\; -\frac{1}{1+x^2}$$

In particolare, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt := \; c - \arctan x$. Allora, mandando x a zero e a $+\infty$ otteniamo (vedi Esempio 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \;= c$ e $0 = c - \frac{\pi}{2}$. Dunque

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\; dt \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \textbf{(integrale di Dirichlet)}$$

ESEMPIO 2 *(la funzione* Γ *di Eulero).*

$$\Gamma(s) \;:=\; \int\limits_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \quad s > 0$$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} \;<\; +\infty \;\; \forall s > 0$ e $e^{-t}\, t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{t}$. Inoltre, $(t,s) \to t^{s-1}\, e^{-t}$ é equidominata se $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$, $\underline{s} > 0$, e quindi $\Gamma(s)$ é continua.

Siccome $\frac{\partial}{\partial s} t^{s-1} e^{-t} = t^{s-1} \log t e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s) = \int\limits_0^{\infty} t^{s-1} \log t\, e^{-t} dt$, $s > 0$. Γ é infatti C^∞. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int\limits_0^{\infty} t^{s-1}\, (\log t)^2\, e^{-t}\, dt$ (Γ é strettamente convessa). Infine, integrando per parti, $\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-t}\, dt \;=\; \frac{1}{s} \int\limits_0^{\infty} t^s\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. In particolare, siccome $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Il *comportamento asintotico di* $n!$ é descritto dalla **Formula di Stirling**

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;+\; \circ(1) \right], \quad \text{per} \quad s \to +\infty$$

CONVOLUZIONE Siano $f, \varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in C_0$ (cioé φ é continua e nulla fuori di un compatto) f continua. Allora

$$(f * \varphi)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\varphi(y)\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\, dt \;=\; (\varphi * f)(x) \quad \text{é} \quad C^\infty \quad \text{e}$$

$$\varphi \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad f * \varphi \in C^\infty \quad \text{e} \quad \frac{d^k}{dx^k}(f * \varphi)(x) \;=\; (f * \frac{d^k \varphi}{dx^k})(x)$$

Prova. Scrivendo $t = x - y$, $(f * \varphi)$ si trasforma in $(\varphi * f)$. Poi, c'é equidominatezza: se $g(x-t) = 0$ per $|t| \geq R$ e $|x| \leq c$, allora

$$|\frac{d^k}{dx^k}\, f(t)g(x-t)| \;=\; |f(t)\, g^{(k)}(x-t)| \;\leq\; c_k |f(t)|\chi_{[-R,R]}, \;\; c_k := \sup_{x \in \mathbf{R}} |g^{(k)}(x)|$$

Esercizio. Provare che se $f \in C_0$ e p é un polinomio di grado n, allora $f * p$ é un polinomio di grado n.

Scriviamo $p(x-y) = \sum_{k=0}^n a_k (x-y)^k = \sum_{k=0}^n b_k(y) x^k$ e quindi

$$(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(x-y)dy = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) b_k(y) dy \right) x^k$$

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \;=\; 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).
Sia $\varphi_\epsilon(x) \;:=\; \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora $f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon \to 0} f$ uniformemente sui limitati.

Infatti, $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq \epsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)dy = 1$, $x \in B_R \Rightarrow |f(x) - (f * \varphi_\epsilon)(x)| =$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \;\leq$$

$$\sup_{|x| \leq R,\, |x-y| \leq \epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon \to 0} 0 \quad (f \text{ é uniformemente continua in } [R-\epsilon,\, R+\epsilon]!)$$

APPENDICE: Una dimostrazione della Formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;+\; \circ(1)\right], \quad \text{per} \quad s \to +\infty$$

Effettuando il cambio di variabile $t = s\tau$, troviamo

$$\Gamma(s+1) := \int_0^{\infty} t^s\, e^{-t}\, dt = s^s \int_0^{\infty} \tau^s e^{-s\tau} s d\tau \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int_0^{\infty} e^{-s(\tau - \log\tau\, -1)}\, d\tau$$

e ponendo poi $\quad t = \tau - 1$ troviamo

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int_{-1}^{\infty} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt$$

Osserviamo che $\frac{d}{dt}[t-\log(t+1)] = \frac{t}{t+1}$ e quindi $m(t) := t - \log(t+1)$ ha un minimo assoluto in $t=0$ in cui vale zero. In particolare, $|t| \geq \delta \Rightarrow m(t) \geq c_\delta > 0$. Inoltre, $m(t) \geq \frac{t}{2}$ per t grande, diciamo $t \geq M$. Si trova allora $\alpha > 0$ tale che

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt + \int_{\delta}^{M} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt + \int_{M}^{+\infty} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt \leq e^{-\alpha s}$$

Stimiamo ora l'integrale in $[-\delta, \delta]$: $\quad \forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tale che

$$\frac{t^2}{2+\epsilon} \leq t - \log(1+t) \leq \frac{t^2}{2-\epsilon} \qquad \forall t \in [-\delta_\epsilon, \delta_e]$$

Dalla diseguaglianza di sinistra, ed usando poi il cambio di variabile $x = \sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}t$,

$$\int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt \leq \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} e^{-\frac{st^2}{2+\epsilon}} = 2\frac{\sqrt{2+\epsilon}}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx$$

mentre la diseguaglianza di destra dá allo stesso modo

$$\int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt \geq 2\frac{\sqrt{2-\epsilon}}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2-\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx$$

Combinando le diseguaglianze ottenute conludiamo che

$$\circ(1) + 2\sqrt{2-\epsilon} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2-\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx \leq \frac{\Gamma(s+1)}{s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s}} \leq \circ(1) + 2\sqrt{2+\epsilon} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx$$

e ció conclude la prova della formula di Stirling.