AM2 2009-2010
II ESONERO

TEMA 1.

Provare che se una serie di funzioni converge totalmente allora converge uniformemente.

Provare con degli esempi che una serie puó essere uniformemente convergente senza essere totalmente convergente.

TEMA 2.

Sia I l'intervallo di convergenza di una data serie di potenze. Provare che la somma di tale serie di potenze é una funzione analitica in I.

TEMA 3.

Enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Bessel.

Dedurre che ogni $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ é sviluppabile in serie di Fourier.

TEMA 4.

Enunciare e dimostrare il Teorema di Picard relativo al Problema di Cauchy.

TEMA 5.

Siano $a_{ij} \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad i, j = 1, \ldots, n$. Provare che l'insieme di tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \qquad \mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

(i) é un sottospazio linare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$

(ii) é uno spazio vettoriale di dimensione n.

ESERCIZIO 1.

Calcolare, facendo uso dei teoremi sulle serie di potenze, la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

ESERCIZIO 2.

Sia $X := \{\gamma \in C([0,1], \mathbf{R}^2 : \quad \|\gamma(t)\| = 1 \quad \forall t \in [0,1]\}$.
Date $\gamma, \beta \in X$, sia $d(\gamma, \beta) := \sup\limits_{t\in[0,1]} \|\gamma(t) - \beta(t)\|$.

Stabilire se X, dotato di tale metrica, é uno spazio completo.

ESERCIZIO 3.

Provare che tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra loro equivalenti.

ESERCIZIO 4.

Determinare, tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^{''''} - x^{'''} - x^{'} + x = e^{-t}$$

quelle, se esistono, che tendono a zero al tendere di t a $+\infty$.

ESERCIZIO 5.

Riconoscere, determinando la funzione Hamiltoniana, che il sistema 2×2

$$\dot{x} = 2y, \qquad \dot{y} = 4x(x^2 - 1)$$

é di tipo Hamiltoniano.

Vista l'Hamiltoniana, determinare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali si hanno traiettorie limitate.

Detta $(x(t), y(t))$ la soluzione passante per $(2,3)$, stabilire, studiando $\frac{d}{dt}(y(t))^2$, se tale soluzione é definita per tutti i tempi positivi e/o per tutti i tempi negativi.