AM2 2009-2010
RECUPERO I ESONERO

TEMA 1.

Sia $F \subset \mathbf{R}^n$. Provare che

$$F \text{ é chiuso} \qquad \Leftrightarrow \qquad (u_k \in F,\ u_k \to_k u \qquad \Rightarrow \qquad u \in F).$$

TEMA 2.

Sia $f \in C(K, \mathbf{R}^m)$. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto.

Provare che $f(K)$ é compatto.

Dedurre che ogni $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ é dotata di minimo e massimo valore su ogni sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^n$.

TEMA 3.

Provare che se é $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ allora f é differenziabile in O.

TEMA 4.

Sia $f \in C^2(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$. Provare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in O$$

TEMA 5.

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Provare la formula di Taylor:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;< \nabla f(u)\,,\, h > \;+ \tfrac{1}{2} < H_f(u)\, h,\, h > \;+\; \circ\,(||h||^2).$$

ESERCIZIO 1.

Sia $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Sia $\gamma \in C([0,1], \mathbf{R}^n)$. Provare che

$$\gamma(0) \in O \quad \text{e} \quad \gamma(1) \notin O \quad \Rightarrow \quad \exists t \in (0,1) \quad \text{tale che} \quad \gamma(t) \in \partial O.$$

ESERCIZIO 2.

Sia $f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2, \quad g = f^2$.
Determinare i punti stazionari di g e stabilire se si tratta di minimi/ massimi/ selle.

ESERCIZIO 3.

Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, sia $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.
Esprimere $g_{\rho\rho}, g_{\theta\theta}$ mediante f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} e dedurre che

$$f_{xx}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + f_{yy}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_{\rho\rho} + \tfrac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \tfrac{1}{\rho} g_\rho$$

Utilizzare tale formula per trovare le funzioni $f \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbf{R})$ a simmetria radiale (tali cioé che $\frac{\partial}{\partial\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \equiv 0$) che soddisfano l'equazione

$$f_{xx} + f_{yy} \equiv 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ESERCIZIO 4.

Determinare il raggio di convergenza della serie $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!} x^n$.

Stabilire il comportamento della serie al bordo dell'intervallo di convergenza.