Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 4 (16 Ottobre 2009)
Massimi e minimi in più variabili

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$: $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 4x, 4y - 4y^3\right)$ si annulla se e solo se $x = 0 \vee \pm 1$ e $y = 0 \vee \pm 1$, dunque abbiamo nove punti critici. La matrice Hessiana è $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$, dunque l'origine è un punto di sella perché $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ha due autovalori di segno discorde; analogamente, sono selle anche i quattro punti $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$, perché $H_f(\pm 1, 1) = H_f(\pm, -1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono invece due punti di minimo locale, perché $H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ è strettamente definita positiva, mentre $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di massimo perché $H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ ha entrambi gli autovalori negativi.

   (b) $f(x,y) = xy\left(x^2 + y^2 - 1\right)$: $\nabla f(x,y) = \left(y\left(x^2 + y^2 - 1\right) + 2x^2 y, x\left(x^2 + y^2 - 1\right) + 2xy^2\right) = \left(y\left(3x^2 + y^2 - 1\right), x\left(x^2 + 3y^2 - 1\right)\right)$ si annulla in $(0,0)$, quando $y = 0 = x^2 + 3y^2 - 1$ (cioé in $(\pm 2, 0)$), quando $x = 0 = 3x^2 + y^2 - 1$ (cioé in $(0, \pm 2)$), e quando $x^2 + 3y^2 - 1 = 0 = 3x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cioé in $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$). $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 3y^2 - 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \end{pmatrix}$, quindi l'origine, $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$ sono punti di sella perché $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $H_f(\pm 2, 0) = H_f(0, \pm 2) = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$ hanno determinante negativo. I punti $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ sono di minimo relativo perché $H_f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ha determinante e traccia positiva, mentre $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ sono di massimo relativo in quanto $H_f\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ha traccia negativa e determinante positivo.

   (c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$: $\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 3y^2, -6xy\right)$ si annulla solo in $(0,0)$: la matrice Hessiana $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 6x \end{pmatrix}$ è identicamente nulla nell'origine, quindi non ci dà informazioni: tuttavia, studiando il segno della funzione notiamo che $f(0,0) = 0$ e in ogni intorno dell'origine ci sono sia punti in cui la funzione assume valori positivi (ad esempio, $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^3}$) sia punti in cui assume valori negativi (ad esempio, $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{n^3}$), e dunque l'origine non può essere né un punto di massimo né di minimo relativo.

(d) $f(x, y) = x^4 - x^3 \sin y$: $\nabla f(x, y) = \left(4x^3 - 3x^2 \sin y, -x^3 \cos y\right)$ si annulla in tutti i punti in cui $x = 0$ e in quelli in cui $\cos y = 0$ e $x = \frac{3}{4} \sin y$, ovvero nei punti del tipo $\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi 2k\pi\right)$. $H_f(x, y) = = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6x \sin y & -3x^2 \cos y \\ -3x^2 \cos y & x^3 \sin y \end{pmatrix}$, dunque i punti $\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ sono dei minimi perché $H_f\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = = H_f\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{27}{64} \end{pmatrix}$, mentre $H_f(0, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non ci dà informazioni. Tuttavia, studiando il segno della funzione notiamo che intorno a ogni punto dell'asse y ci sono sia punti in cui la funzione è positiva sia punti in cui è negativa, dunque sono tutti punti di sella.

(e) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$: $\nabla f(x, y) = (yz \cos(xyz), xz \cos(xyz), xy \cos(xyz))$ si annulla in tutti i punti in cui due delle tre coordinate sono nulle e in quelli in cui $xyz = \frac{\pi}{2} + k\pi$: i punti del primo tipo sono tutti di sella perché intorno ad ogni punto per cui $xyz = 0$ ci sono punti in cui $xyz > 0$ (e dunque $\sin(xyz) > 0$) e altri in cui in cui $xyz > 0$ (e dunque $\sin(xyz) > 0$); i punti in cui $xyz = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sono tutti di massimo assoluto, perché $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 \geq \sin(xyz)\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e dunque in particolare sono di minimo relativo; analogamente, i punti dove $xyz = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ sono di minimo relativo perché $\sin(xyz) \geq \geq -1 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$.

2. (a) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$: sicuramente $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, perché $f(0, y) = = y^2 \overset{y \to +\infty}{\to} +\infty$; inoltre, $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + 1 + y^2 - 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 + +y^2 - 1 \geq -1$ e $f(\pm 1, 0) = -1$, dunque $\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = -1$.

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x^4 + y^2 + 2y + 2}$: sicuramente $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$, perché $f(x, y) = = \frac{1}{x^4 + (y + 1)^2 + 1} > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(x, 0) = \frac{1}{x^4 + 2} \overset{x \to +\infty}{\to} 0$; inoltre, $f(x, y) = \frac{1}{x^4 + (y + 1)^2 + 1} \leq 1$ e $f(0, -1) = -1$, dunque $\sup_{\mathbb{R}^2} f = = \max_{\mathbb{R}^2} f = 1$.

3. (a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ è continua nell'origine perché

$|f(x,y)-f(0,0)| \le \frac{|x|^3}{x^2+y^2}+\frac{|y|^3}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}+\frac{|y|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=$
$=|x|+|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$. Inoltre ha entrambe le derivate perché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=1$ e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$;
ha anche le derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=$
$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^3h^3+t^3k^3}{t\left(t^2h^2+t^2k^2\right)}=\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}$, ma non è differenziabile perché
$\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^3+k^3-(h+k)\left(h^2+k^2\right)}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}$ non
va a 0, in quanto se $h=k$ vale $\frac{-2x^3}{2x^2\sqrt{2}|x|} \overset{x\to 0}{\to} \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0)\end{cases}$ ha derivate parziali tutte e tre nulle perché è nulla lungo gli assi, inoltre è differenziabile (e dunque continua e derivabile in ogni direzione) perché
$\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)}\left|\frac{f(h,k,j)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(h,k,j)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\right|=$
$=\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)}\frac{|hjk|}{h^2+k^2+j^2}\le\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)}\frac{|h|\sqrt{h^2+j^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2+j^2}}{h^2+k^2+j^2}=$
$=\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)}|h|=0$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$: essendo la funzione nulla lungo gli assi cartesiani, si avrà $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mentre nei punti diversi dall'origine si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2y\left(x^2+y^4\right)-2x^4y}{\left(x^2+y^4\right)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3\left(x^2+y^4\right)-4x^3y^4}{\left(x^2+y^4\right)^2}$,
che sono entrambe continue nell'origine, perché $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|=\left|\frac{3x^2y\left(x^2+y^4\right)-2x^4y}{\left(x^2+y^4\right)^2}\right|\le$
$\le\frac{3x^2|y|\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}+\frac{2x^4|y|}{\left(x^2+y^4\right)^2}\le\frac{3|y|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}+\frac{2|y|\left(x^2+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}=$
$=5|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=\left|\frac{x^3\left(x^2+y^4\right)-4x^3y^4}{\left(x^2+y^4\right)^2}\right|\le\frac{|x|^3\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}+$
$+\frac{4x^3|y|^4}{\left(x^2+y^4\right)^2}\le\frac{|x|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}+\frac{4\left(x^2+y^4\right)|x|\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2}=5|x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$;
dunque,
$f\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
Mostriamo ora che f non è di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$: se per assurdo lo fosse, per il lemma di Schwartz dovrebbe essere $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e quindi in particolare anche nell'origine; invece, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0 \text{ ma } \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^4 x} = 1.$$

5. Per la regola di derivazione di funzioni composte, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$
$= \left\langle \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right), \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right\rangle$, ma $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$ e $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \Rightarrow \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}$,
dunque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Analogamente, essendo $\dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$ e $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}$, si ha che
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left\langle \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right), \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right\rangle =$
$= \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.