Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 7 (13 Novembre 2009)
Successioni di funzioni, serie di funzioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, e dunque la convergenza non può essere uniforme, perché le f_n sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ mentre la funzione limite non lo è. Tuttavia, la convergenza è uniforme in ogni insieme del tipo $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché $$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| \le \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \frac{1}{nx^2} = \frac{1}{n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} \overset{n\to\infty}{0}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \le \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$; per stabilire se la convergenza è uniforme calcoliamo $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|$, che per la disparità delle f_n sarà uguale a $\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)$, ma essendo $f_n(0) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ questo sup sarà raggiunto in un punto stazionario di f_n: $f_n'(x) = = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm n$, dunque $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = f_n(n) = \dfrac{1}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque la convergenza è uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

   (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e dunque la convergenza non può essere uniforme, perché le f_n sono continue su tutto $\mathbb{R}$ (perché $\dfrac{\sin(nx)}{nx} \overset{x\to 0}{\to} 1$ mentre la funzione limite non è continua; tuttavia, la convergenza è uniforme su $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| \le \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \dfrac{1}{n|x|} = \dfrac{1}{n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (e) $f_n(x) = \cos^n x \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x\notin\pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } x\in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$: essendo le f_n periodiche, per studiare la convergenza uniforme ci si può restringere all'intervallo $[0,2\pi]$: sicuramente la convergenza non è uniforme su tutto l'intervallo, perché non c'è convergenza puntuale in $x=\pi$ e la funzione limite è discontinua a differenza delle f_n, ma lo è in $[\delta,\pi-\delta]\cup[\pi+\delta,2\pi-\delta]$ $\forall\delta>0$, perché $\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]\cup[\pi+\delta,2\pi-\delta]} |f_n(x)| = \cos^n\delta \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x^2)}{n^2x^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme

su tutto $\mathbb{R}$, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\sin 1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$, tuttavia, c'è convergenza uniforme su $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché
$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|f_n(x)| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \frac{1}{n^2x^2+1} = \frac{1}{n^2\delta^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}$ è una serie geometrica di ragione e^{-x^2} e dunque converge $\Leftrightarrow e^{-x^2}<1$, cioè $\forall x\neq 0$; la convergenza non è uniforme (e dunque neanche totale) perché non c'è convergenza puntuale sul bordo del dominio, ma è totale (e dunque uniforme) su $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|e^{-nx^2}| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta^2} < +\infty$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$, e dunque puntualmente e uniformemente, perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} < +\infty$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2x^2+1}$ converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$, perché per $x=0$ è una somma di zeri e per $x\neq 0$ ha lo stesso andamento di $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, ma la convergenza non è totale perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{n^2x^2+1}\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = +\infty$; la convergenza non è neanche uniforme perché la successione delle somme parziali non è Cauchy-uniforme: infatti, $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{2N}\frac{x}{n^2x^2+1}\right| \geq \sum_{n=N}^{2N}\frac{\frac{1}{2N}}{n^2\left(\frac{1}{2N}\right)^2+1} \geq \sum_{n=N}^{2N}\frac{\frac{1}{2N}}{(2N)^2\left(\frac{1}{2N}\right)^2+1} = \sum_{n=N}^{2N}\frac{1}{4N} = \frac{1}{2} \overset{N\to\infty}{\not\to} 0$. Tuttavia, c'è convergenza totale e uniforme in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$, perché $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{x}{n^2x^2+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\frac{x}{n^2x^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\delta} < +\infty$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n+\log(\log n)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log\left(x^{\log n+\log(\log n)}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\log n+\log(\log n))\log x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\log(n\log n)}\right)^{\log x} = \sum_{n=1}^{\infty}(n\log n)^{\log x}$, dunque converge $\Leftrightarrow \log x < -1 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$, perché per il criterio di condensazione di Cauchy la serie ha lo stesso andamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (2^n \log(2^n))^{\log x} =$

$= \log 2^{\log x} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x} 2^{n(1+\log x)}$; la convergenza non è uniforme (né totale) perché la serie non converge per $x = \dfrac{1}{e}$, ma è totale in $\left(0, \dfrac{1}{e} - \delta\right]$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \left(0, \frac{1}{e} - \delta\right]} \left|(n \log n)^{\log x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} (n \log n)^{\log\left(\frac{1}{e} - \delta\right)} < +\infty$

3. (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme in $[-1, 1]$ perché $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{e^{-\frac{x^2}{n}} - 1}{1+x^2}\right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \left|e^{-\frac{x^2}{n}} - 1\right| = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, e dunque essendo l'intervallo di integrazione limitato è possibile scambiare limite e integrale: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx =$

$= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e inoltre $\displaystyle\left|\frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2}\right| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-x^2}$ che è integrabile e dunque c'è equidominatezza; inoltre, la convergenza è uniforme in $[-b, -a] \cup [a, b]$ $\forall b > a > 0$, perché $\displaystyle\sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left|\frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2}\right| \leq$

$\leq \displaystyle\sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left|e^{-nx^2}\right| = e^{-na^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque è possibile scambiare limite e integrale su $[0, +\infty)$ e su $(-\infty, 0]$, e quindi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx =$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx +$

$+ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx = \int_{0}^{+\infty} 0 dx + \int_{-\infty}^{0} 0 dx = 0.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n}$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[0, 1]$, perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} < +\infty$, dunque essendo l'intervallo di integrazione limitato è possibile scambiare serie e integrale: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi n x)}{n^2+n} dx =$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi n x)}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi n x)}{4\pi n}\right]_0^1 =$

$= \displaystyle\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n n^x}$ converge totalmente in $[0, +\infty)$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\log n}{2^n n^x} \right| \leq$
$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} < +\infty$, dunque essendo la serie a termini positivi è possibile scambiare serie e integrale: $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n n^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\log n}{2^n n^x} dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \int_0^{+\infty} e^{-x \log n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \left[-\frac{1}{\log n} e^{-x\log n} \right]_0^{+\infty} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \frac{1}{\log n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$

4. $f_n(x) = xe^{-2n^2x^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$; per stabilire se la convergenza è uniforme calcoliamo $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$, che per la disparità di f sarà uguale a $\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x)$; inoltre, essendo $f_n(0) = 0 = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$, verrà raggiunto in un punto in cui f_n' si annulla: $f_n' = \left(1 - 4x^2n^2\right) e^{-2n^2x^2} =$ $= 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2n}$, dunque $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{e}n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e cioè $f_n \to 0$ uniformemente. Per quanto riguarda invece f_n', ho che $f_n'(x) =$ $= \left(1 - 4x^2n^2\right) e^{-2n^2x^2} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, e dunque non può convergere uniformemente perché passando al limite ho perso la continuità; di conseguenza ho che $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = (0)' = 0$, e quindi l'uguaglianza vale $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2} dt}{n^2}$ converge totalmente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2} dt}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{n^2} <$ $< +\infty$, dunque c'è anche convergenza uniforme e convergenza puntuale in ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè la funzione è ben definita; inoltre, essendo $S_N(x) =$ $= \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2} dt}{n^2}$ una successione di funzioni continue (somme finite di funzioni continue), grazie alla convergenza uniforme ho che la continuità è mantenuta passando al $\lim_{N\to\infty}$, e cioè anche f è continua. Per quanto riguarda la derivabilità, ho che la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n}$ converge totalmente su $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \; \forall \delta > 0$, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left| \frac{e^{-n^2x^2}}{n} \right| =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\delta^2}}{n} < \infty$; dunque, f è derivabile in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \; \forall \delta > 0$ e quindi anche in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty$; in $x = 0$ invece non è possibile applicare il teorema di derivazione per serie di funzioni perchè la serie delle derivate non converge (è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), e infatti la funzione non è deriv-

abile perché $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\int_0^{nx} e^{-t^2} dt}{n^2 x} \geq$
$\geq \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{N} \dfrac{\int_0^{nx} e^{-t^2} dt}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{nx} e^{-t^2} dt}{n^2 x} = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x \to 0} \dfrac{n e^{-n^2 x^2}}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} \geq$
$\geq M$ $\forall M > 0$ e quindi $f'(0) = +\infty$, cioè f non è derivabile in 0.