Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 12 (18 Dicembre 2009)
Equazioni differenziali

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:
   (a) $\ddot{x} + x = e^t$
   (b) $\dddot{x} - 2\dot{x} - 4x = 1$
   (c) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = e^t$
   (d) $\ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = t \sin t$

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

   (a) $\begin{cases} \ddot{x} + 3x = \cos(3t) \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = e^{-3t} \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 6e^{4t} \\ \ddot{x}(0) = 30 \\ \dot{x}(0) = 10 \\ x(0) = 4 \end{cases}$

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy al variare del dato iniziale x_0, determinando l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

4. Determinare i punti di equilibrio dei seguenti problemi di Cauchy e dire per quali dati iniziali x_0 la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = |x| \arctan(e^x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

5. Si consideri il sistema gradiente $(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla F(x, y)$, con $F \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ inferiormente limitata.
   (a) Provare che $\lim\limits_{t \to +\infty} \|\nabla F(x(t), y(t))\| = 0$.
   (b) Trovare F tale che il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \\ \dot{y} = -2x - 4y \end{cases}$ può essere scritto in questa forma.
   (c) Mostrare che in questo caso $(x(t), y(t)) \stackrel{t \to +\infty}{\to} (0, 0)$ per qualsiasi dato iniziale.

6. Dato il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2 + y^2 - 2\right) \\ \dot{y} = -4x\left(x^2 + y^2 - 2\right) \end{cases}$ determinare i punti di equilibrio, trovare una costante del moto e disegnare le traiettorie.