Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 3 (9 OTTOBRE 2009)
DERIVAZIONE IN PIÙ VARIABILI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^8+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

2. Stabilire se le seguenti funzioni possono essere estese a funzioni di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^2+y^6}$

3. Siano $f(x,y) = x^2e^{xy^3}$ e $\gamma(t) = (\cos t, t)$. Verificare che $\dfrac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle$

4. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

   (a) Continua, derivabile in ogni direzione ma non parzialmente derivabile.
   (b) Continua, parzialmente derivabile ma derivabile non in tutte le direzioni.
   (c) Continua ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni.
   (d) Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione ma discontinua.
   (e) Parzialmente derivabile ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.
   (f) Derivabile in ogni direzione ma discontinua e non parzialmente derivabile.