Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 1 (24 Febbraio 2010)
Ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f è una funzione di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ perché rapporto di funzioni di classe C^1 in cui il denominatore non è nullo quindi per provare la differenziabilità di f su $\mathbb{R}^2$ è sufficiente provare che f è differenziabile in $(0,0)$. Per prima cosa osserviamo che f ammette derivate parziali nell' origine in quanto

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

   Adesso proviamo la differenziabilità di f in $(0,0)$

   $$\left| \frac{f(h,k) - f(0,0) - < \nabla f(0,0), (h,k) >}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{h^2k^2}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{h^2k^2}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

   $$\leq \frac{k^2}{h^4+k^2} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^4+k^2}{h^4+k^2} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   quindi f è differenziabile.
   Per provare che f non è di classe C^1 dobbiamo far vedere che almeno una delle derivate parziali di f non è continua.

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^4+y^2} - \frac{4x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Notiamo che $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ non è continua nell'origine perché

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} - \frac{2x^8}{(2x^4)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

   Quindi f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe C^1

2. Siccome $f(x,g(x)) = 0 \ \forall\, x \in R$ derivando rispetto ad x otteniamo che

   $$0 = \frac{d}{dx} f(x,g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + g'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   In particolare per $x = 0$ siccome $g(0) = 0$ abbiamo che $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + g'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2g'(0) \Longrightarrow g'(0) = 0$
   Derivando di nuovo rispetto ad x la relazione precedente otteniamo che

   $$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + g^{''}(x)\frac{\partial f}{\partial y} + g'(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + g'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

quindi per $x = 0$ si ottiene $0 = 1 + 2g^{''}(0) \Longrightarrow g''(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Siccome $g'(0) = 0$ e $g''(0) < 0$ allora 0 è un punto di massimo relativo per g.

3. (a) $|\sin x| \leq |x|$

   $|\sin x| = \left|\int_0^x \frac{d}{dt}\sin t\; dt\right| = \left|\int_0^x \cos t\; dt\right| \leq \left|\int_0^x |\cos t| dt\right| \leq \left|\int_0^x 1\; dt\right| = |x|$

   Si poteva anche dimostrare la disuguaglianza utilizzando il teorema di Lagrange: $\forall x \in \mathbb{R}$ applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\sin x$ nell'intervallo $(0, x)$ (o $(x, 0)$) otteniamo che $\exists\ \xi = \xi(x) \in (0, x)$ tale che $\sin x = \sin x - \sin 0 = \cos\xi \cdot (x - 0) = \cos\xi \cdot x$. Passando ai moduli si ottiene che $|\sin x| = |\cos\xi||x| \leq |x|$.
   Anche le prossime disuguaglianze possono essere dimostrate tramite il teorema di Lagrange.

   (b) $|1 - \cos x| \leq \dfrac{x^2}{2}$

   $|1 - \cos x| = |\cos x - \cos 0| = \left|\int_0^x \frac{d}{dt}\cos t\; dt\right| = \left|\int_0^x \sin t\; dt\right| \leq \left|\int_0^x |\sin t|\; dt\right| \leq$
   $\leq \left|\int_0^x |t|\; dt\right| = \frac{1}{2}x^2$

   (c) $|x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$

   $|x - \sin x| \leq \left|\int_0^x 1\; dt - \int_0^x \cos t\; dt\right| = \left|\int_0^x 1 - \cos t\; dt\right| \leq \left|\int_0^x |1 - \cos t| dt\right| \leq$
   $\leq \left|\int_0^x \frac{1}{2}t^2 dt\right| = \frac{1}{6}|x|^3$

   (d) $|\tan x| \leq 2|x|$ se $|x| \leq 1$

   $|\tan x| = \dfrac{|\sin x|}{\cos x} \leq \dfrac{|x|}{|\cos x|} \leq \dfrac{|x|}{\cos 1} \leq \dfrac{|x|}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2|x|$

   (e) $|\arctan x| \leq |x|$

   $|\arctan x| \leq \left|\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right| \leq \left|\int_0^x 1\; dt\right| = |x|$

   (f) $|e^x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

   $|e^x - 1| \leq \left|\int_0^x e^t dt\right| \leq \left|\int_0^x e^{|x|} dt\right| = e^{|x|}|x| \leq e|x| \leq 3|x|$

   (g) $|\sinh x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

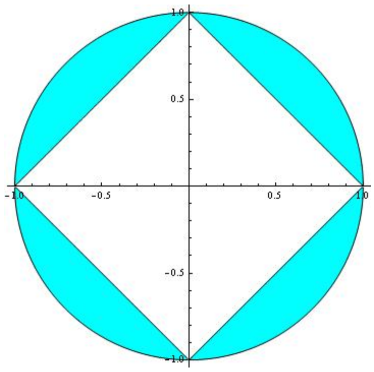
   $|\sinh x| = \dfrac{|e^x - e^{-x}|}{2} = \dfrac{|e^x - 1 + 1 - e^{-x}|}{2} \leq \dfrac{|e^x - 1|}{2} + \dfrac{|1 - e^{-x}|}{2} \leq$
   $\leq \frac{3}{3}|x| + \frac{3}{2}|x| = 3|x|.$

   (h) $|\log(1 + x)| \leq 2|x|$ se $|x| \leq \dfrac{1}{2}$

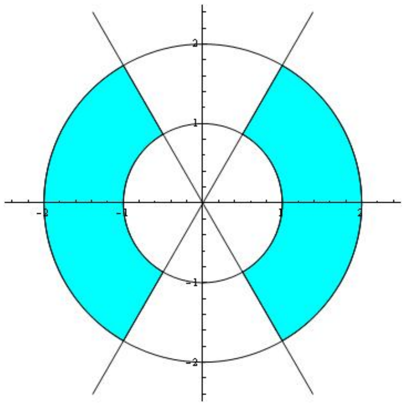
   $|\log(1 + x)| = \left|\int_0^x \frac{dt}{1+t}\right| \leq \left|\int_0^x \frac{1}{1-\frac{1}{2}} dt\right| = 2|x|$

4. (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |x| + |y| \geq 1\}$

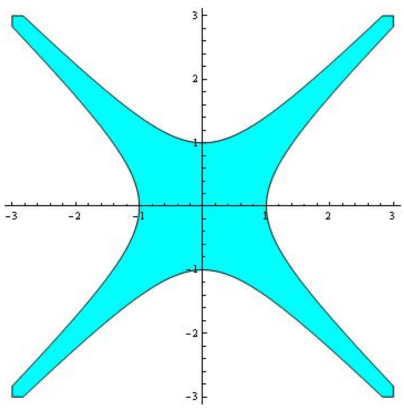
   A è la regione ottenuta intersecando il cerchio unitario con le regioni $y \geq 1 - |x|$ e $y \leq |x| - 1$.



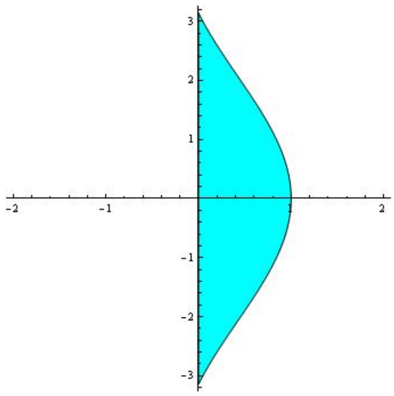
(b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq \sqrt{3}|x|\right\}$
B è la regione ottenuta intersecando la corona di raggi 1 e 2 con l' insieme $-\sqrt{3}|x| \leq y \leq \sqrt{3}|x|$



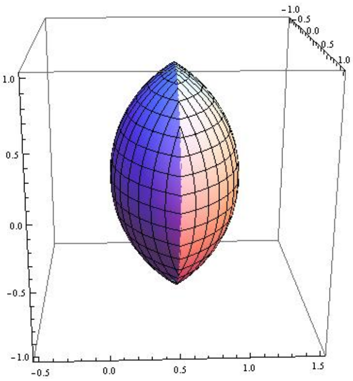
(c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - y^2| \leq 1\right\}$
C è la porzione di piano delimitate delle iperboli $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - x^2 = 1$

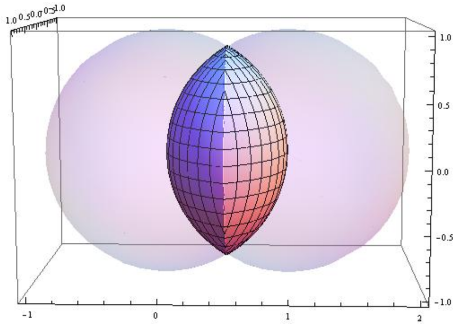


(d) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \dfrac{\sin y}{y}, y^2 \leq \pi^2 \right\}$
D è la regione di piano compresa tra l'asse y e il grafico della funzione $x = \frac{\sin y}{y}$ nell'intervall0 $[-\pi, \pi]$

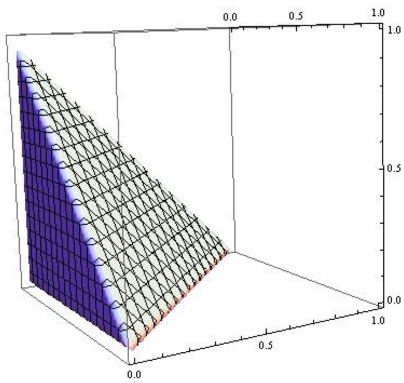


5. (a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y\}$
E è l'insieme ottenuto intersecando la palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 con la palla di centro $(0,1,0)$ e raggio 1

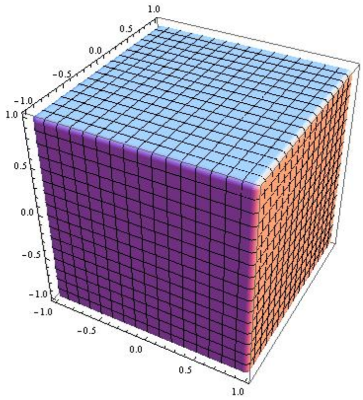




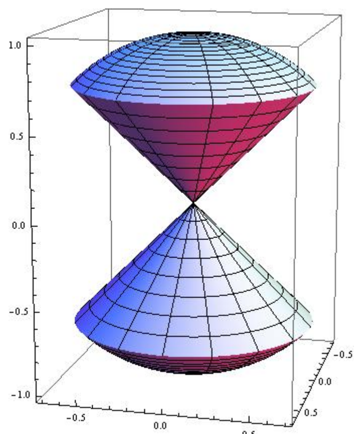
(b) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
F è il tetraedro ottenuto tagliando il settore $x, y, z > 0$ con il piano $x + y + z = 1$ (che è il piano ortogonale al vettore $(1,1,1)$ passante per $(0,0,1)$)

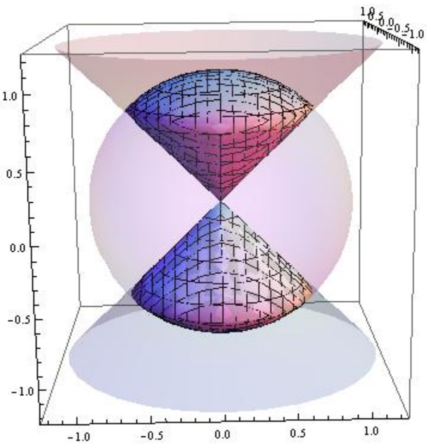


(c) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq 1\right\}$
G è il cubo centrato nell'origine con spigoli di lunghezza 2

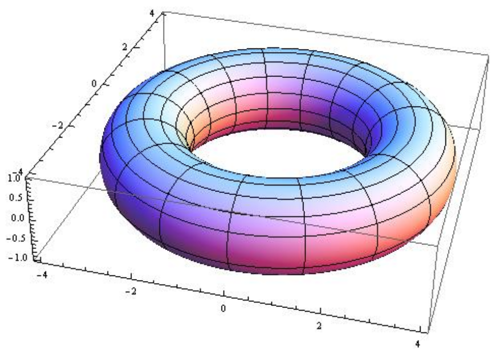


(d) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2\right\}$
H è l'intersezione tra la palla unitaria e l'interno del cono $x^2+y^2=z^2$ avente vertice in $(0,0,0)$, asse parallelo all'asse z e angolo di apertura $\frac{\pi}{4}$.





(e) $I = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 + z^2 = 1\right\}$
I è il toro (la ciambella) ottenuta ruotando attorno all'asse z il cerchio del piano yz di equazione $(y-3)^2+z^2=1$.



6. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^{2x}}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx = e^{-2x}\sin x\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x\,dx =$

$\displaystyle = 2\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx = 2\left(-e^{-2x}\cos x\Big|_0^{\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx\right) =$

$\displaystyle = 2 - 4\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx = 2 - 4\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{2x}}dx$ quindi

$\displaystyle 5\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{2x}}dx = 2 \Longrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{2x}}dx = \frac{2}{5}$

(b) $\displaystyle\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx = \int_0^{4\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}dx = \sqrt{2}\int_0^{4\pi}|\sin\frac{x}{2}|dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx +$

$\displaystyle -\sqrt{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\sin\frac{x}{2}dx = -2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_{2\pi}^{4\pi} = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2} =$

$= 8\sqrt{2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx$

Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$ allora $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ quindi

$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi}\frac{2}{2+2t^2+1-t^2}dt = 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{3+t^2} =$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \overset{z=\frac{t}{\sqrt{3}}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan z\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(d) $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-x-3}{x^4-9}\,dx$

Cerchiamo A, B, C, D tali che $\displaystyle\frac{x^2-x-3}{x^4-9} = \frac{A}{x-\sqrt{3}} + \frac{B}{x+\sqrt{3}} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$.

$A(x+\sqrt{3})(x^2+3) + B(x-\sqrt{3})(x^2+3) + (Cx+D)(x^2-3) = x^2-x-3 \Rightarrow A(x^3+\sqrt{3}x^2+3x+3\sqrt{3}) + B(x^3-\sqrt{3}x^2+3x-3\sqrt{3}) + Cx^3 + Dx^2 - 3Cx - 3D = x^2-x-3 \Rightarrow x^3(A+B+C) + x^2(A\sqrt{3}-B\sqrt{3}+D) + x(3A+3B-3C) + 3\sqrt{3}A - 3\sqrt{3}B - 3D = x^2-x-3$ da cui

$$\begin{cases} A+B+C=0\\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}+D=1\\ 3A+3B-3C=-1\\ 3\sqrt{3}A-3\sqrt{3}B-3D=-3\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=0\\ A+B-C=-\frac{1}{3}\\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}+D=1\\ \sqrt{3}A-\sqrt{3}B-D=-1\end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che $C=\frac{1}{6}$ mentre dalle ultime due che $D=1$.

Sostituendo questi valori nel sistema otteniamo $\begin{cases} A+B=-\frac{1}{6}\\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}=0\end{cases}$ da cui $A = B = -\frac{1}{12}$.

Dunque $\displaystyle\frac{x^2-x-3}{x^4-9} = -\frac{1}{12}\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\frac{1}{x+\sqrt{3}} + \frac{\frac{1}{6}x+1}{x^2+3}$ e quindi

$\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-x-3}{x^4-9}\,dx = -\frac{1}{12}\int_3^{\infty}\frac{dx}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\int_3^{\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int_3^{\infty}\frac{x}{x^2+3} + \int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2+3}$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\log(x-\sqrt{3}) - \frac{1}{12}\log(x+\sqrt{3}) + \frac{1}{12}\log(x^2+3)\Big|_3^{\infty} + \int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2+3} =$

$\displaystyle = \frac{1}{12}\log\left(\frac{x^2+3}{x^2-3}\right)\Big|_3^{\infty} + \int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3} = +\frac{1}{12}\log 1 - \frac{1}{12}\log 2 + \frac{1}{3}\int_3^{\infty}\frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy = -\frac{1}{12}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan y\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi - \frac{1}{12}\log 2$