Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 7 (7 APRILE 2010)
RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. $x_n(k) = \dfrac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}$.

   (a) $\|x_n\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|\dfrac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\right| = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{+\infty}\cos^k\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\dfrac{1}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ e $\|x_n\|_2 =$
   $= \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\dfrac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\right|^2} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\cos^2\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^k} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\dfrac{1}{1-\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}}$.

   (b) $\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_2 1 \lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\frac{1}{n^2}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}2 = +\infty$, quindi x_n non converge in ℓ_1, mentre $\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{1}{\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} =$
   $= \lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}}\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n^2}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} =$
   $= 0$, quindi x_n converge a 0 in ℓ_2.

2. $\Phi(x)(k) = e^{-k-1}x^2(k)$.

   (a) Φ non è una contrazione in ℓ_∞ perché ha più di un punto fisso: infatti, $\Phi(x) = x \iff x(k) = e^{-k-1}x^2(k) \iff x(k)\left(1-e^{-k-1}x(k)\right) =$
   $= 0 \iff x(k) = 0$ oppure $x(k) = e^{k+1}$, dunque tutte le successioni del tipo $x(k) = \begin{cases} e^{k+1} & \text{per un numero finito di } k \\ 0 & \text{per gli altri } k \end{cases}$ sono punti fissi; è essenziale che $x(k) = e^{-k-1}$ solo per finiti valori di k, perché altrimenti $x \notin l_\infty$.

   (b) Φ è una contrazione sulla palla unitaria $X = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \le 1\}$ perché $\forall x \in X$ si ha $\|\Phi(x)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}x^2(k)\right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}\right|\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|^2 \le$
   $\le e^{-1}\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|^2 \le \dfrac{1}{e} \le 1$ e dunque $\Phi(X) \subset X$, e inoltre $\forall x, y \in X$ si ha $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}\left(x^2(k)-y^2(k)\right)\right| \le$
   $\le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}\right|\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)-y(k)|\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)+y(k)| \le$
   $\le e^{-1}\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)-y(k)|\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|+\sup_{k\in\mathbb{N}}|y(k)|\right) \le \dfrac{2}{e}\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)-y(k)| =$
   $= \dfrac{2}{e}\|x-y\|_\infty$.

3. $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=\left(\sqrt{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}-e^{-y_1}+\cos y_2, \log(\cosh x_1)-\frac{\sin(x_1x_2)}{1+y_1^2}+\arctan y_2\right).$

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0,0,0,0)=(0,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0)=\left.\begin{pmatrix} e^{-y_1} & -\sin y_2 \\ \frac{2y_1\sin(x_1x_2)}{\left(1+y_1^2\right)^2} & \frac{1}{1+y_2^2}\end{pmatrix}\right|_{(x_1,x_2,y_1,y_2)=(0,0,0,0)}=$ $=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ è invertibile (con $T=\left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists\, r,\rho>0$ e $g\in$ $\in C^1(B_r((0,0)),B_\rho((0,0)))$ tale che $F(x_1,x_2,g_1(x),g_2(x))\equiv 0\ \forall x\in B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $r\leq\frac{1}{2}$ e $\rho\leq 1$ si ha che $\|F(x_1,x_2,0,0)\|=$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}\right)^2+(\log(\cosh x_1)-\sin(x_1x_2))^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{1+x_1}-1+1-\frac{1}{1+x_2}\right)^2+(\log(1+(\cosh(x_1)-1))-\sin(x_1x_2))^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{\left(\left|\sqrt{1+x_1}-1\right|+\left|1-\frac{1}{1+x_2}\right|\right)^2+(|\log(1+(\cosh(x_1)-1))|+|\sin(x_1x_2)|)^2}$$

$$\leq\sqrt{\left(\left|\frac{\left(\sqrt{1+x_1}-1\right)\left(\sqrt{1+x_1}+1\right)}{\sqrt{1+x_1}+1}\right|+\left|\frac{x_2}{1+x_2}\right|\right)^2+(2|\cosh(x_1)-1|+|x_1x_2|)^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{\left(\frac{|x_1|}{\sqrt{1+x_1}+1}+\frac{|x_2|}{1-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(2\frac{|e^{x_1}+e^{-x_1}-2|}{2}+\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{(|x_1|+2|x_2|)^2+\left(|e^{x_1}-1|+|e^{-x_1}-1|+\frac{r^2}{2}\right)^2}\leq\sqrt{(3r)^2+\left(6|x_1|+\frac{r}{2}\right)^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{9r^2+\left(6r+\frac{r}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{4}r^2+\frac{169}{4}r^2}=\frac{\sqrt{205}}{2}r\leq\frac{15}{2}r,$$ dunque per avere $\sup_{x\in B_r(0,0)}\|F(x_1,x_2,0,0)\|\leq\frac{15}{2}r\leq\frac{\rho}{4}=\frac{\rho}{4\|T\|_\infty}\leq\frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $\rho=\frac{r}{30}$; inoltre, $\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)=$ $=\begin{pmatrix} 1-e^{-y_1} & \sin y_2 \\ -\frac{2y_1\sin(x_1x_2)}{\left(1+y_1^2\right)^2} & 1-\frac{1}{1+y_2^2}\end{pmatrix}$, dunque essendo $\left|1-e^{-y_1}\right|\leq 3|y_1|\leq$ $\leq 3\rho$, $|\sin(y_2)|\leq|y_2|\leq\rho$, $\left|-\frac{2y_1\sin(x_1x_2)}{\left(1+y_1^2\right)^2}\right|\leq 2|y_1||\sin(x_1x_2)|\leq$ $\leq 2\rho|x_1x_2|\leq 2\rho\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\leq\rho r^2\leq\rho r\leq\frac{\rho^2}{30}\leq\frac{\rho}{30}$ e $\left|1-\frac{1}{1+y_2^2}\right|=$ $=\frac{y_2^2}{1+y_2^2}\leq y_2^2\leq\rho^2\leq\rho$, allora per avere

$$\sup_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in B_r((0,0))\times B_\rho((0,0))}\left\|\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right\|\leq$$

$$\leq 2\sup_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in B_r((0,0))\times B_\rho((0,0))}\left\|\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right\|_\infty\leq 6\rho\leq$$

$\leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{12}$, e di conseguenza $r = \frac{\rho}{30} = \frac{1}{360}$.

(c) Essendo $\sqrt{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} - e^{-g_1(x_1,x_2)} + \cos(g_2(x_1,x_2)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r((0,0))$, allora $0 = \frac{d}{dx_1}\left(\sqrt{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} - e^{-g_1(x_1,x_2)} + \cos(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x_1}} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)e^{-g_1(x_1,x_2)} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\sin(g_1(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= \frac{1}{2} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) = -\frac{1}{2}$ e $0 = \frac{d}{dx_2}\left(\sqrt{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} - \right.$
$\left.-e^{-g_1(x_1,x_2)} + \cos(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left(\frac{1}{(1+x_2)^2} + \right.$
$\left.+\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)e^{-g_1(x_1,x_2)} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\sin(g_1(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= 1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) = -1$, analogamente $\log(\cosh x_1) -$
$-\frac{\sin(x_1x_2)}{1+g_1^2(x_1,x_2)} + \arctan(g_2(x_1,x_2)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r((0,0))$, dunque $0 =$
$= \frac{d}{dx_1}\left(\log(\cosh x_1) - \frac{\sin(x_1x_2)}{1+g_1^2(x_1,x_2)} + \arctan(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= \left(\tanh x_1 - \frac{-2g_1(x_1,x_2)\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)\sin(x_1x_2) + \left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)(x_2\cos(x_1x_2))}{\left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)^2} + \right.$
$\left.+\frac{\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{1+g_2^2(x_1,x_2)}\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) = 0$ e $0 =$
$= \frac{d}{dx_2}\left(\log(\cosh x_1) - \frac{\sin(x_1x_2)}{1+g_1^2(x_1,x_2)} + \arctan(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= \left(-\frac{-2g_1(x_1,x_2)\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)\sin(x_1x_2) + \left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)(x_1\cos(x_1x_2))}{\left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)^2} + \right.$
$\left.+\frac{\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{1+g_2^2(x_1,x_2)}\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) = 0$; quindi,
$g_1(x_1,x_2) = g_1(0,0) + \left\langle\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0), \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(0,0)\right), (x_1,x_2)\right\rangle +$
$+o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) = -\frac{x_1}{2} - x_2 + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$ e $g_2(x_1,x_2) = g_2(0,0) +$
$+\left\langle\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0), \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0)\right), (x_1,x_2)\right\rangle + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) = o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$

4. $F(x,y) = \left(\sin(xy) + x\cos y, e^{x+y} - \frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = (0,0)$, inoltre $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) + \cos y & x\cos(xy) - x\sin y \\ e^{x+y} - \frac{2x}{(1+x_2+y_2)^2} & e^{x+y} - \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$),

dunque per il teorema della funzione inversa $\exists\, r, \rho > 0$ e $g \in$ $\in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall (u,v) \in$ $B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $\rho \leq 1$, si ha che $\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y) =$
$= \begin{pmatrix} 1 - y\cos(xy) - \cos y & x\sin(y) - x\cos(xy) \\ y\cos(xy) + \cos(y) - e^{x+y} + \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} & 1 + x\cos(xy) - x\sin(y) - e^{x+y} + \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$
dunque essendo $|1 - y\cos(xy) - \cos y| \leq |y||\cos(xy)| + |1 - \cos y| \leq |y| +$ $+\dfrac{y^2}{2} \leq \rho + \dfrac{\rho^2}{2} \leq \dfrac{3}{2}\rho$, $|x\sin(y) - x\cos(xy)| \leq |x||\sin(y)| + |x||\cos(xy)| \leq$ $\leq 2|x| \leq 2\rho$, $\left| y\cos(xy) + \cos(y) - e^{x+y} + \dfrac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} \right| \leq |y||\cos(xy)| +$ $+|\cos(y) - 1| + \left|1 - e^{x+y}\right| + \dfrac{2|x|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq |y| + \dfrac{y^2}{2} + 3(|x| + |y|) +$ $+2|x| \leq \rho + \dfrac{\rho^2}{2} + 6\rho + 2\rho \leq \dfrac{19}{2}\rho$ e $\Big|1 + x\cos(xy) - x\sin(y) - e^{x+y} +$ $+\dfrac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}\Big| \leq |x||\cos(xy)| + |x||\sin(y)| + \left|1 - e^{x+y}\right| + \dfrac{2|y|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq$ $\leq 2|x| + 3(|x| + |y|) + 2|y| \leq 2\rho + 6\rho + 2\rho = 10\rho$, allora per avere $\sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\| \mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y) \right\| \leq 2 \sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\| \mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y) \right\|_\infty \leq$ $\leq 20\rho \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{40}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{160} =$ $= \dfrac{\rho}{4} = \dfrac{\rho}{4\|T\|} \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$.

(c) Essendo $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall (u,v) \in B_r((0,0))$, allora $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(g(u,v))\dfrac{\partial g}{\partial(u,v)}(u,v) = \dfrac{\partial}{\partial(u,v)}F(g(u,v)) = \dfrac{\partial}{\partial(u,v)}(u,v) =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall (u,v) \in B_r((0,0)) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial(u,v)}(0,0) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dunque $g_1(u,v) = g_1(0,0) + \left\langle \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial u}(0,0), \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(0,0)\right), (u,v) \right\rangle +$ $+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = u + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$ e $g_2(u,v) = g_2(0,0) +$ $+\left\langle \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial u}(0,0), \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(0,0)\right), (u,v) \right\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = v - u +$ $+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$.

5. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z > 0\right\}$ e $f(x,y,z) = x^2y^2 + \log z$.

(a) f è superiormente limitata su E perché se $(x,y,z) \in E$ allora $x, y, z \leq 1$, dunque $f(x,y,z) \leq 1^2 1^2 + \log 1 = 1$, ma non è inferiormente limitata su E perché $\left(0, 0, \dfrac{1}{n}\right) \in E$ e $f\left(0, 0, \dfrac{1}{n}\right) = \log\left(\dfrac{1}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

(b) Essendo f inferiormente illimitata su E, $\inf\limits_E f = -\infty$; per calcolare $\sup\limits_E f$, notiamo che se $E \ni (x_n, y_n, z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 +\right.$

$+y^2+z^2 \leq 1, z=0\big\}$, $f(x_n,y_n,z_n) \overset{n\to+\infty}{\to} -\infty$, dunque l'estremo superiore non sarà raggiunto sul bordo inferiore E_1 di E e perciò sarà un massimo; inoltre, $\nabla f(x,y,z) = \left(2xy^2, 2x^2y, \frac{1}{z}\right) \neq (0,0,0)\ \forall (x,y,z) \in E$, quindi questo massimo non sarà raggiunto all'interno di E e dunque verrà necessariamente realizzato sul suo bordo superiore $E_2 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0\big\}$: per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, le coordinate dei punti in cui viene raggiunto il massimo sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 2xy^2 = 2\lambda x \\ 2x^2y = 2\lambda y \\ \frac{1}{z} = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} 2x\left(y^2-\lambda\right) = 0 \\ 2y\left(x^2-\lambda\right) = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2z^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(y^2-\frac{1}{2z^2}\right) = 0 \\ y\left(x^2-\frac{1}{2z^2}\right) = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2z^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases}$; se fosse $y^2 = \frac{1}{2z^2}$, allora avrei $x^2 = \frac{1}{2z^2}$, perché $y \neq 0$, dunque $1 = x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^2} + z^2 = \frac{z^4+1}{z^2} \iff 0 = z^4 - z^2 + 1 = \left(z^2-1\right)^2 + z^2$, che è assurdo, dunque dev'essere $x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{y}{2z^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 1$, quindi $\sup_E f = \max_E f = f(0,0,1) = 0$

6. $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$ per $t \in [0,\pi]$

   (a) $\|\dot\gamma(t)\| = \left\|\left(3\sin t\cos^2 t, 3\sin^2 t\cos t\right)\right\| = 3|\sin t||\cos t|\|(\cos t, \sin t)\| = 3|\sin t||\cos t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3|\sin t||\cos t| = 0$ se $t = \frac{\pi}{2}$, dunque γ non è regolare; tuttavia, è regolare a tratti perché $\|\dot\gamma(t)\| \neq 0\ \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

   (b) $l(\gamma) = \int_0^\pi \|\dot\gamma(t)\|dt = \int_0^\pi 3|\sin t||\cos t|dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t + 3\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\sin t\cos t = 3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\left[-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$

   (c) $\int_\gamma \sqrt[3]{|xy|}d\ell = \int_0^\pi \sqrt[3]{|x(t)y(t)|}\|\dot\gamma(t)\|dt = \int_0^\pi |\cos t\sin t| 3|\sin t||\cos t| = 3\int_0^\pi \frac{(2\cos t\sin t)^2}{4}dt = 3\int_0^\pi \frac{\sin^2(2t)}{4}dt = \int_0^\pi \frac{1-\cos(4t)}{8}dt = 3\left[\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32}\right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi.$

7. $x_n(k) = \dfrac{1+\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2}$

   Ponendo $x(k) = \frac{1}{k^2}$, si ha che $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} x$ in ℓ_2, perché $\|x_n - x\|_2^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\frac{k}{n^2}}{k^2} \right|^2 = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$; inoltre, $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} x$ anche in ℓ_1 perché $\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} +$

$$+ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\left|\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$