

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 4 (17 MARZO 2010)

TEOREMI DELLA FUNZIONE IMPLICITA E DELLA FUNZIONE INVERSA

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x_1, x_2, y) = e^{x_1 x_2 y} + \cos(x_2^2) - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+y}$.
 - (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho(0))$ tale che $F(x_1, x_2, g(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r((0,0))$.
 - (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .
 - (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g .
2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y_1, y_2) = \left(\log y_2 + e^{y_1} - \cos x, \arctan(y_1 y_2) - \frac{\sin x}{2 + y_1^2} \right)$.
 - (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho((0,1)))$ tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r(0)$.
 - (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .
 - (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g .
3. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(y) = y^2 + y + \cosh y$.
 - (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(1), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u \forall u \in B_r(1)$.
 - (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .
 - (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g .
4. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = \left(\sqrt{1+x^2} - e^{\arctan y}, x + x^3 + y^2 \right)$.
 - (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u, v)) = (u, v)$ $\forall (u, v) \in B_r((0,0))$.
 - (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .
 - (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g .
5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = \left(\arctan x + \frac{x^2}{2} - \ln \cos y, y + \frac{e^{xy}}{1+y^2} + \cosh(x^2 + y^2) \right)$.
 - (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,2)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u, v)) = (u, v)$ $\forall (u, v) \in B_r((0,2))$.
 - (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ .
 - (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della prima componente della funzione g .