Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 5 (24 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Calcolare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = x - y$ nell'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y^2 = 1, 0 \leq x \leq 3\right\}$.

2. Calcolare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = 2x + 3y + 6z$ nell'insieme $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$.

3. Trovare i punti della parabola di equazione $y = x^2 - 1$ che distano meno dall'origine.

4. Siano $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 2, x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}$ e $f(x,y) = e^{xy}$. Calcolare $\max_E f$ e $\min_E f$.

5. Siano $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y \geq 1, x \geq 0, y \leq 1\right\}$ e $f(x,y) = x + y^2$. Calcolare $\sup_E f$ e $\inf_E f$, specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui sono raggiunti.

6. Siano $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z < 1\right\}$ e $f(x,y,z) = z^3 + xy$. Calcolare $\sup_E f$ e $\inf_E f$, specificando se si tratta del massimo e/o del minimo e determinando eventualmente i punti in cui sono raggiunti.

7. Siano $a, b, c > 0$ e sia $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$. Determinare le coordinate del punto $p \in E$ per cui è minimo il volume del tetraedro definito intersecando il piano tangente in p ad E con i piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

8. Sia $F(x,y) = \left(\cos x \cos y + x \log\left(\frac{2}{\pi} y\right), e^{xy}\right)$.

   (a) Provare che F è invertibile in un intorno del punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Fornire una stima del raggio dell'intorno in cui F è invertibile e del raggio dell'intorno di definizione di F^{-1}.

   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di F^{-1} nel punto $F\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.