II Esonero di AM3 - 29/5/2010

1) [10 punti] Sia S la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ racchiusa tra i cilindri $x^2 + y^2 = 2$ e $x^2 + y^2 = 6$. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S (z - x^2) d\sigma.$$

2) [10 punti] Calcolare

$$\int_E \frac{xy}{1+y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

ove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sqrt{x},\ z \le x + z \le \frac{\pi}{2}\}$.

3) [10 punti] Sia

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \to (1 + \cos t)(\cos t, \sin t) + (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$$

la parametrizzazione della cardiode centrata in $(-1, 0)$. Sia $\omega = M dx + N dy$ una $1-$forma differenziale con coefficienti

$$M(x, y) = \frac{x^5}{(x^2 + y^2)^2}\ , \quad N(x, y) = x - 2y \log(x^2 + y^2) - y^3 \frac{4x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

a) Mostrare che

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1.$$

b) Calcolare l'area del dominio E racchiuso da γ, ove

$$E = \{(-1, 0) + \rho(\cos\theta, \sin\theta) :\ \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \le 1 + \cos\theta\}.$$

c) Usando il Teorema di Gauss-Green ed i punti precedenti, calcolare

$$\int_\gamma \omega.$$