Esecitazione AM3 n.3- 4 -A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema della funzione implicita e convergenza negli spazi l^p

(1) Siano x_n e y_n, $n \geq 1$ definite nel modo seguente:

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{\sin(k\,n)}{k+1}+2\right)$$

$$y_n^{(k)} = \frac{2}{n\,(k+1)}$$

per $k = 0, 1, \ldots$

- Discutere se x_n appartiene a l^1 e/o l^2.
- Discutere la convergenza della successione x_n in l^2 e della successione $x_n - y_n$ in l^1 per $n \to +\infty$.

(2) Sia $F^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente

$$F(x, y, z) = \cos x \ \cos y \ e^z - \cos(z^2).$$

- Rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{ F = 0 \}$ localmente in $p_0 = (0, 0, 0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga.
- Trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto all'origine.

(3) Sia

$$F : (y, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to F(y, x) \in \mathbb{R}^2$$

definita da

$$F(y,x) = \begin{cases} F_1(y_1, y_2, x) = \sin x + e^x \ y_1 + \sin(y_1\,y_2) \\ F_2(y_1, y_2, x) = 3\,|x| + y_2 + y_1^4 \end{cases} \tag{1}$$

e sia $p_0 = (0, 0, 0)$. Dimostrare che vale il teorema delle funzioni implicite in $(0, 0, 0)$ e trovare ρ ed r che soddisfano le stime presenti nell'enunciato del teorema.

Soluzioni

(1) Da $\sin x = x + O(x^3)$ per $x \to 0$ si ottiene che $\delta\, x \le \sin x \le \frac{x}{\delta}$ e $|\sin x - x| \le \frac{x^3}{\delta}$ per $x \in [0,1]$ e δ piccolo. Da $|\sin| \le 1$, si ottiene allora

$$\|x_n\|_1 \ge \frac{\delta}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty, \quad , \quad \|x_n\|_2^2 \le \frac{9}{n^2\,\delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} < +\infty.$$

Ossia $x_n \notin l^1$ ma $x_n \in l^2$.
Dal punto precedente si ha che

$$\|x_n\|_2 \le \frac{3}{n\,\delta}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

ossia $x_n \to 0$ in l^2. D'altra parte

$$x_n^{(k)} - y_n^{(k)} = \frac{2}{\sqrt{k+1}}\left(\sin\Big(\frac{1}{n\sqrt{k+1}}\Big) - \frac{1}{n\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sin\Big(\frac{1}{n\sqrt{k+1}}\Big)\,\sin(k\,n)$$

e quindi

$$\|x_n - y_n\|_1 \le \frac{1}{\delta}\Big(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Ossia $x_n - y_n \to 0$ in l^1.

(2) • Sia $p_0 = (0,0,0)$, $F(p_0) = 0$. Calcoliamo

$$\nabla F(x,y,z) = (-\sin x\,\cos y\, e^z, -\cos x\,\sin y\, e^z, \cos x\,\cos y\, e^z + 2\,z\,\cos(z^2)).$$

Risulta $\nabla F(p_0) = (0,0,1)$, essendo $\partial_z F(p_0) = 1$ invertibile con inversa $T = 1$, possiamo applicare il Teorema della Funzione implicita e trovare una mappa

$$g(x,y) : B_r(0,0) \to B_\rho(0),$$

per $\rho, r > 0$ piccoli, che descrive localmente in p_0 l'insieme $\{\, F = 0 \,\}$ come grafico

$$\{\, (x, y, g(x,y)) \;:\; (x,y) \in B_r(0,0) \,\}.$$

Per trovare esplicitamente $r, \rho \in (0,1)$, osserviamo che:

$$\sup_{|(x,y)|<r} |F(x,y,0)| = \sup_{|(x,y)|<r} |\cos x\,\cos y - 1| \le \sup_{|(x,y)|<r} (|\cos x||\cos y - 1| + |\cos x - 1|) \le 2\,r \le \rho$$

non appena $r \leq \frac{\rho}{2}$, dove $|1-\cos s| = |\sin\xi|\,|s| \leq |s|$ per il Teorema di Lgrange. Abbiamo inoltre che per $\rho \leq \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\sup_{|(x,y)|<r,\ |z|<\rho} |1-\partial_z F(x,y,z)| &= \sup_{|(x,y)|<r,\ |z|<\rho} |1-\cos x\,\cos y\,e^z - 2z\,\cos(z^2)| \\ &\leq 2\rho + \sup_{|(x,y)|<r,\ |z|<\rho} |1-\cos x\,\cos y\,e^z| \\ &\leq 2\rho + \sup_{|(x,y)|<r,\ |z|<\rho} (|1-\cos x\,\cos y| + |\cos x\,\cos y\,(e^z-1)|) \leq 6\rho \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

in vista delle precedenti stime e di $|e^s-1| = e^\xi\,|s| \leq e\,|s| \leq 3\,|s|$ dal Teorema di Lgrange. Basta quindi scegliere $\rho = \frac{1}{12}$ e di conseguenza $r = \frac{\rho}{2} = \frac{1}{24}$.

- Abbiamo $g(0,0)=0$ e $g(x,y)$ soddisfa:

$$0 = \cos x\,\cos y\,e^{g(x,y)} - \cos(g^2(x,y)), \quad \forall\,(x,y)\in B_r(0,0).$$

Derivando in x tale relazione otteniamo:

$$0 = -\sin x\,\cos y\,e^{g(x,y)} + \cos y\,e^{g(x,y)}\partial_x g(x,y) + 2\,g(x,y)\partial_x g(x,y)\,\sin g^2(x,y)$$

$\forall\,(x,y)\in B_r(0,0)$. Quindi $\partial_x g(0,0)=0$ e, per simmetria di x e y, $\partial_y g((0,0) = 0$. Derivando ulterioremente in x e y in $(0,0)$ otteniamo:

$$0 = -\cos x\,\cos y\,e^{g(x,y)} + \cos x\,\cos y\,e^{g(x,y)}\,\partial_{x\,x} g(x,y)_{|x=y=0} = -1$$

$$0 = \cos x\,\cos y\,e^{g(x,y)}\,\partial_{x\,y} g(x,y)_{|x=y=0} = \partial_{x\,y} g(0,0).$$

Per simmetria di x e y, abbiamo che $\partial_{x\,x} g(0,0) = \partial_{y\,y} g(0,0) = 1$, $\partial_{x\,y} g(0,0) = 0$. Quindi lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $g(x,y)$ in $(0,0)$ viene:

$$g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + O(|(x,y)|^3).$$

(3) Si ha che $F(0,0,0)=0$ inoltre

$$\begin{aligned}\det\nabla_y F_{|(0,0,0)} &= \begin{pmatrix}\partial_{y_1}F_1 & \partial_{y_2}F_1 \\ \partial_{y_1}F_2 & \partial_{y_2}F_2\end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} e^x + x\,\cos(y_1\,y_2)\,y_2 & x\,\cos(y_1\,y_2)\,y_1 \\ 4\,y_1^3 & 1\end{pmatrix}_{(0,0,0)} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Quindi vale il teorema delle funzioni implicite. Ora studiamone l'aspetto quantitativo. La prima stima da verificare é

$$\sup_{|x|\leq r} |F(0,0,x) \leq \frac{\rho}{2}$$

e nel nostro caso abbiamo

$$\sup_{|x|} |(\sin x, 3\,|x|)| \leq 4\,r \leq \frac{\rho}{2}$$

da cui otteniamo una prima stima su r: $r \leq \frac{1}{8}$.
La seconda stima da verificare é

$$\sup_{|x|\leq r,\ |\leq\rho} \|\mathrm{Id} - \nabla_y F\| = \sup_{|x|\leq r,\ |y|\leq\rho} \| \begin{pmatrix} e^x + x\,\cos(y_1\,y_2)\,y_2 & x\,\cos(y_1\,y_2)\,y_1 \\ 4\,y_1^3 & 1 \end{pmatrix} \|.$$

Osserviamo che data una matrice A di ordine $m\times n$, vale che $\|A\|_{op} \leq \sqrt{m\,n}\|A\|_\infty$, quindi in questo caso devo verificare che valga

$$\sup_{|x|\leq r,\ |y|\leq\rho} \|\mathrm{Id} - \nabla_y F\| \leq \frac{1}{4}.$$

Imponiamo che la stima valga su tutti gli elementi della matrice:

$$|-4\,y_1^3| \leq 4\,\rho^3 \leq \frac{1}{4}$$

$$|-x\,\cos(y_1\,y_2)\,y_1| \leq r\,\rho \leq \frac{\rho^2}{8} \leq \frac{1}{4}$$

$$|1 - e^x - x\,\cos(y_1\,y_2)\,y_2| \leq e^r - 1 + r\,\rho \leq 3\,r + \frac{\rho^2}{8} \leq \frac{3}{8}\rho + \frac{\rho^2}{8} \leq \frac{1}{4}$$

(se $r < 1$) dove ho usato anche la stima precedentemente ottenuta su r in funzione di ρ. Scegliendo $\rho \leq \frac{1}{4}$ tutte e tre le stime sono verificate. Quindi abbiamo trovato: $\rho = \frac{1}{4}$ e $r = \frac{1}{32}$.