AM5-2008: Settimana 3

SOMMABILITÁ ed $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

f misurabile si dice sommabile, e scriveremo $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, se $\int |f| < \infty$.

In tal caso $\quad \int_X f \quad := \quad \int_X f^+ - \int_X f^-$.

Proposizione 1. Siano $f, g \in \mathcal{L}^1$, $t, s \in \mathbf{R}$. Allora

(i) $tf + sg \in \mathcal{L}^1$ e $\int tf + sg = t\int f + s\int g$

(ii) $f \le g, \quad \Rightarrow \quad \int f \le \int g$. In particolare, $|\int f| \le \int |f|$

(iii) $\int |f| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{f \ne 0\}$ ha misura nulla (f é nulla q. o.)

(iv) $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

(v) $\{|f| \ne 0\}$ é $\sigma-$**finito**, cioé

esistono E_j misurabili e di misura finita tali che $\{|f| \ne 0\} \subset \cup_j E_j$

Prova di (i). $(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \quad \Rightarrow$

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \qquad \Rightarrow$$

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ \qquad \Rightarrow$$

$$\int f + g = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

Prova di (iii). φ indica una funzione semplice: $\int |f| = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0 \le \varphi \le |f| \Rightarrow \int \varphi = 0) \Leftrightarrow (0 \le \varphi \le |f| \Rightarrow \mu(\{\varphi \ne 0\} = 0) \Leftrightarrow \mu(\{|f| \ne 0\} = 0$$

Prova di (iv). $\int |f| \ge \int |f| \ \chi_{\{|f| \ge n\}} \ \ge \ n\, \mu(\{|f| \ge n\}) \ \Rightarrow$

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) \le \mu(\{|f| \ge n\}) \le \frac{1}{n}\int |f| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Prova di (v). $\{f \ne 0\} = \cup_n \{|f| \ge \frac{1}{n}\}$ e

$$+\infty > \int |f| \ge \int |f| \ \chi_{\{|f| \ge \frac{1}{n}\}} \ge \frac{1}{n}\mu(\{|f| \ge \frac{1}{n}\})$$

Teorema 1 (Lebesgue) *Siano $f_n \in \mathcal{L}^1$. Se f_n é equidominata (se esiste cioé g sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ quasi per ogni x) e f_n converge ad f q.o., allora $f \in \mathcal{L}^1$ ed $\int |f_n - f| \to_n 0$.*

Prova. Se f_n converge ad f q.o., esiste N tale che

$$\mu(N) = 0\ , \quad |f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \ \forall x \notin N \quad \text{e} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x) \ \ \forall x \notin N$$

e ció assicura che $\int |f_n(x) - f(x)| = \int |f_n(x) - f(x)| \chi_{N^c} \to 0$.

Definizione. Se $f \in \mathcal{L}^1$ ed E é misurabile, $\int\limits_E f := \int\limits_X f\, \chi_E$

Proposizione 2. Sia $f \in \mathcal{L}^1$. Allora

(i) $A \subset B$, A, B misurabili $\Rightarrow \int\limits_A |f| \leq \int\limits_B |f|$

(ii) $\int\limits_{\{f \geq c\}} f \geq c\ \mu(\{f \geq c\}) \ \ \forall c$

(iii) $(\inf_A f)\ \mu(A) \leq \int_A f \leq (\sup_A f)\ \mu(A)$

(iv) $A_j \in \Sigma,\ A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall\, i \neq j \ \Rightarrow \int_{\cup_j A_j} f = \sum_j \int_{A_j} f$

(v) $A_j \in \Sigma,\ A_j \subset A_{j+1}\ \forall j \ \Rightarrow \int_{A_j} f \to \int_{\cup_j A_j} f$

(vi) $A_j \in \Sigma,\ A_{j+1} \subset A_j\ \forall j \ \Rightarrow \int_{A_j} f \to \int_{\cap_j A_j} f$

Prova di (iv)-(v)-(vi). $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\, i \neq j \ \Rightarrow \ \chi_{\cup_j A_j} = \sum_j \chi_{A_j} \ \Rightarrow \ f\, \chi_{\cup_j A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n f\, \chi_{A_j}$ e $|\sum_{j=1}^n f\ \chi_{A_j}| \leq |f|$. Dal teorema di Lebesgue,

$$\int_{\cup_j A_j} f = \int f \chi_{\cup_j A_j} = \int \lim_n \sum_{j=1}^n f\, \chi_{A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f$$

Analogamente, $\chi_{A_j} \to \chi_{\cup_j A_j}, \quad \chi_{A_j} \to \chi_{\cap_j A_j}, \quad |f \chi_{A_j}| \leq |f| \quad \Rightarrow$

$$\int_{\chi_{A_j}} f = \int f \chi_{A_j} \to \int f \chi_{\cup_j A_j} = \int_{\chi_{\cup_j A_j}} f \quad \text{e} \quad \int_{\chi_{A_j}} f = \int f \chi_{A_j} \to \int f \chi_{\cap_j A_j} = \int_{\chi_{\cap_j A_j}} f$$

Assoluta continuitá dell'integrale: *Sia f sommabile. Allora*

$$(i) \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0 :\ \mu(A) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \int_A |f| \leq \epsilon$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon :\ \mu(A_\epsilon) < \infty \quad e \quad \int_{A_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$$

Prova. (i) Per assurdo: $\exists \epsilon_0 > 0$, $\exists A_j$ tali che $\mu(A_j) \leq \frac{1}{2^j}$ e $\int_{A_j} |f| \geq \epsilon_0$. Se $B := \cap_n \cup_{j\geq n} A_j$, risulta $\mu(B) = 0$ e $\int_B |f| = \lim_n \int_{\cup_{j\geq n} A_j} |f| \geq \epsilon_0$, contraddizione.

(ii) É $\{|f| > 0\} = \cup A_n,\ A_n := \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$, $\mu(A_n) < \infty$, $\int |f| = \lim \int_{A_n} |f|$. Dunque, $\exists n_\epsilon$: $\epsilon + \int_{A_{n_\epsilon}} |f| \geq \int |f| = \int_{A_{n_\epsilon}} |f| + \int_{A^c_{n_\epsilon}} |f|$.

CONVERGENZA QUASI OVUNQUE, IN MISURA, IN MEDIA

Siano f_n, f funzioni misurabili in (X, Σ, μ). Diremo che f_n converge a f

quasi ovunque (q.o.) se $\exists N \in \Sigma :\ \mu(N) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)\ \ \forall x \notin N$

in misura se $\forall \epsilon > 0,\ \ \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to_n 0$

in media se f_n, f sono sommabili e $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to_n 0$.

Nota. Unicitá del limite: se f_n converge a f e a g q.o. (oppure in misura, oppure in media) allora $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = 0$, (si dice $f = g$ q.o.)

Lemma

(i) $f_n \to f$ in media $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura

(ii) $f_n \to f$ q.o. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura sugli insiemi di misura finita

(iii) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\exists n_k :$ $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque

Prova.

(i) Segue da: $\int |f_n - f| \geq \epsilon\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\})$

(ii) Sia $g_n := |f_n - f|$. É $\{x \in A :\ g_n \to 0\} = \cap_j \cup_n \cap_{k\geq n} \{x \in A :\ g_k \leq \frac{1}{j}\}$. Quindi, $g_n \to 0$ *q.o.* in A $\Leftrightarrow$ $\mu(\cup_j \cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in A :\ g_k > \frac{1}{j}\}) = 0$. Quindi, se $g_n \to 0$ *q.o.* in A ed A é di misura finita, allora $\mu(\cup_{k\geq n} \{x \in A :\ g_k > \frac{1}{j}\}) \to_n 0$ per ogni j e quindi $f_n \to_n 0$ in misura su A.

(iii) Se $f_n \to_n 0$ in misura, é vero che $\forall j,\ \exists n_j :\ \mu(\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}$, $\forall n \geq n_j$. Siccome $\cup_{j\geq k}\{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$ é una successione decrescente di insiemi con

$\mu(\cup_{j\geq k}\{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$, risulta $\mu(\cap_k \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) = 0$. Ma

$$x \notin \cap_k \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\} \quad \Rightarrow \quad \exists k : \quad j \geq k \quad \Rightarrow \quad g_{n_j}(x) < \frac{1}{j}$$

e quindi $\quad g_{n_j}(x) \to 0 \quad \forall x \notin \cap_k \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$.

Nota. Unicitá del limite: dalla Prop. segue che se f_n converge a f q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, ed f_n convege a g q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, allora $f = g$ q.o.

CONTROESEMPI

(i) La convergenza in misura (cosí come la convergenza q.o.) non implica la convergenza in media: $X = \mathbf{R}$ con la misura di Lebesgue e $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$; f_n converge a zero in misura (e puntualmente), ma $\int_{\mathbf{R}} f_n = 1$.

(ii) La convergenza in misura non implica la convergenza q.o.: $f_{n,k} = \chi_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, ove, dato $, n \in \mathbf{N}$, k va da 1 fino ad n, converge a zero in misura ma non converge in alcun punto (in ogni punto il massimo limite é 1 ed il minimo limite é zero).

(iii) La convergenza puntuale non implica la convergenza in misura: $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ converge a zero puntualmente (e, sugli intervalli limitati, anche in misura), ma non converge in misura su tutto $\mathbf{R}$.

Teorema 1 (Lebesgue) *Siano $f_n \in \mathcal{L}^1$. Se f_n é equidominata e f_n converge ad f in misura, allora $f \in \mathcal{L}^1$ ed f_n converge a f in media.*

Prova. Siccome f_n converge ad f in misura, una sua sottosuccessione converge q.o. e quindi in media. Se f_n non convergesse in media a f, esisterebbero n_k ed $\epsilon > 0$ tali che $\int |f_{n_k} - f| \geq \epsilon$, mentre anche f_{n_k} al pari di f_n dovrebbe avere una sottosuccessione convergente a f in media.

CONVERGENZA IN MISURA E TEOREMA DI VITALI

Abbiamo visto che se f é sommabile, allora

$$(i) \quad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| \leq \epsilon$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \quad \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$$

Se $\int |f_n - f| \to 0$, le proprietá (i)-(ii) valgono (banalmente) **uniformemente** in n:

$$(k) \qquad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int_E |f_n| \,\le\, \epsilon$$

$$(kk) \qquad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \quad \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n| \,\le\, \epsilon$$

Infatti,

$$\int_E |f_n| \,\le\, \int |f_n - f| + \int_E |f| \,\le\, 2\epsilon \quad \text{se} \quad n \ge n_\epsilon \quad \text{e} \quad \mu(E) \le \delta_{\epsilon,f}$$

mentre $\int_E |f_j| \,\le\, \epsilon$ per $j = 1, \ldots, n_\epsilon$ se $\mu(E) \le \delta_{\epsilon, f_1, \ldots, f_{n_\epsilon}}$.
Analogamente, se $\int_{E_\epsilon^c} |f| \,\le\, \frac{\epsilon}{2}$ allora

$$\int_{E_\epsilon^c} |f_n| \,\le\, \int_{E_\epsilon^c} |f_n - f| \,+\, \int_{E_\epsilon^c} |f| \,\le \epsilon \quad \text{se} \quad n \ge n_\epsilon$$

mentre $\int_{E_{j,\epsilon}^c} |f_j| \,\le\, \epsilon$ per $j = 1, \ldots, n_\epsilon$ per certi $E_{j,\epsilon}$ di misura finita e quindi, posto $F_\epsilon = E_\epsilon \cup_j E_{j,\epsilon}$ risulta $\int_{F_\epsilon^c} |f_n| \,\le\, \epsilon$.

TEOREMA DI CONVERGENZA DI VITALI .

Siano f_n sommabili e convergenti in misura ad f. Se valgono (k) e (kk), allora f é sommabile e $\int |f_n - f| \to 0$.

Prova. Dalla Prop. 1-(ii) e dal Lemma di Fatou segue che:

$\exists f_{n_k} \to_k f$ q.o. e quindi $\int_E |f| \,\le\, \underline{\lim} \int_E |f_{n_k}| \le \sup_n \int_E |f_n| \quad \forall E \in \Sigma$. Se

δ_ϵ, E_ϵ sono come in $(k)-(kk)$ e $E_{\epsilon,n} := \{x \in E_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{\epsilon}{\mu(E_\epsilon)}\}$ per cui

$\mu(E_{\epsilon,n}) \le \delta_\epsilon$ se $n \ge n_\epsilon$ ($f_n \to f$ in misura!) vediamo che f é sommabile, perché

$$\int |f| \le \int_{E_\epsilon^c \cup E_{\epsilon,n}} |f| + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f - f_n| + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f_n| \le 3\epsilon + \int_{E_\epsilon} |f_n| \quad \forall n \ge n_\epsilon$$

e, infine, $n \ge n_\epsilon \quad \Rightarrow$

$$\int |f_n - f| = \int_{E_\epsilon^c \cup E_{\epsilon,n}} |f_n - f| + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f_n - f| \le 4\epsilon + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} \frac{\epsilon}{\mu(E_\epsilon)} = 5\epsilon$$

NOTA. Nel Teorema di Vitali l'ipotesi 'f_n converge a f in misura' puó essere sostituita dalla 'f_n converge a f q.o., giacché la convergenza q.o. implica la convergenza in misura sull'insieme di misura finita E_ϵ.

COMPLETEZZA

Una successione di funzioni sommabili f_n soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza in media se

$$\forall\epsilon > 0\,, \qquad \exists n_\epsilon : \qquad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int |f_n - f_m| \leq \epsilon \tag{C}$$

Se f_n converge in media, f_n é necessariamente di Cauchy (i.e. soddisfa (C)). Viceversa, se f_n soddisfa (C) , allora f_n converge in media a una funzione sommabile f:

Teorema *Se f_n é una successione di funzioni sommabili, allora f_n converge in media se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy (C).*

Dimostrazione. La necessitá é ovvia; proviamo la sufficenza. Da (C):

$$\exists n_k : \quad \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \;\leq\; \frac{1}{2^k}$$

Posto $\quad g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, \quad$ dal Teorema di B. Levi otteniamo

$$\int \Big[\sum_k |g_k| \Big] d\mu \;=\; \sum_k \Big[\int |g_k|\, d\mu \Big] \;=\; \sum_k \frac{1}{2^k} \;<\; +\infty \qquad \text{cioé}$$

$$g \;:=\; \sum_k |g_k| \qquad \text{é sommabile e quindi finita q.o.,} \qquad \text{e quindi}$$

la serie $\sum_k g_k$ converge q.o., ovvero $\quad f(x) := \lim f_{n_k}$ esiste q.o. $\quad$ Inoltre,

$$|f_{n_k}| \;\leq |f_1| + g \quad \text{e quindi} \qquad \int |f_{n_k} - f| \to 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Da (C): $\qquad \int |f_n - f| \leq \int |f_n - f_{n_k}| + \int |f_{n_k} - f| \leq \epsilon \quad$ se $\quad n, n_k \geq n_e$

NOTA. Dalla dimostrazione:

f_n di Cauchy $\;\Rightarrow\;\; \exists\;\; f_{n_k}$ equidominata e convergente quasi ovunque.

Definizione di $L^1(\mu)$. $\quad L^1(\mu) = \{[f] : \;\int |f| < \infty\}, \quad [f] := \{g : g = f \;\; q.o.\}$

Possiamo riformulare i fatti mostrati dicendo che

$$\rightarrow \qquad \|f\| := \int |f| \qquad \text{é una norma su} \qquad L^1(\mu)$$

$$\rightarrow \qquad (L^1, \|f\|) \qquad \text{é uno spazio di Banach}$$

Esercizi e complementi 3

Teorema di Egoroff.

Sia $\mu(X) < \infty$. Siano f_n misurabili tali che $f_n(x) \to 0 \;\; \forall x$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \text{ misurabile } : \mu(A_\epsilon) \leq \epsilon \;\text{ e }\; f_n \to 0 \quad \text{uniformemente in} A \setminus A_\epsilon$$

Suggerimento. Provare che $\forall j, \epsilon,\; \exists n(\epsilon, j) : \; \mu(\cup_{n \geq n(\epsilon,j)}\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$ *e considerare* $A_\epsilon := \cup_j \; \cup_{n \geq n(\epsilon,j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}$

Funzioni sommabili

Esercizio 1. Sia f Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N$.

Sia $\quad f_h(x) := f(x-h),\;\; h \in \mathbf{R}^N.\quad$ Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_h(x)dx \;=\; \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

Suggerimento. Provarlo dapprima per le funzioni semplici..

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che

(i) $\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) \qquad$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$

(ii) $\quad g := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ è 1-periodica e sommabile in $[a,b] \quad \forall a < b$

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k \chi_{[0,1]},\;\; f_k(x) := \; f(x+k)$

Esercizio 3. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi, \pi]$.

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx$

Esercizio 4. Sia $\quad n \to r_n$ biiezione di $\mathbf{N}$ su $\mathbf{Q}$.

Provare che $\quad \sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x - r_n|}} \; < \; \infty \qquad$ per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}$.
Suggerimento: Considerare $\quad \int_a^b (\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x - r_n|}}) \;\; a < b.$

Convergenza in misura, q.o., in media

Esercizio 1. Sia $f_n(x) := |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n}$, $x \in (0, 2\pi)$, $k_n \in \mathbf{N}, p_n \to +\infty$. Provare che f_n converge a zero in misura.

Sugg. Confrontare $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \geq \epsilon\})$ *con* $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \geq \epsilon\}$

Esercizio 2. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura per
$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ \ x \in (0,1), \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ \ x \in (1, +\infty)$
$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ \ x \in (0,1), \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ \ x \in (1, +\infty)$
$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2},\ x \in (1, +\infty)$
$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$

Esercizio 3. Siano f_n, g misurabili in $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi tutti gli x. Provare che $L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty \ \ \forall \epsilon > 0, \ \ f_n \to 0 \, q.o. \Rightarrow f_n \to 0$ in misura

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) \leq L^1(\{|g(x)| \geq \epsilon\})$*....*

Esercizio 4. Sia $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \cap [0,1]$ biiezione. Siano

$$\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}, m_k, n_k \quad \text{primi tra loro} \qquad f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}, x \in [0,1]$$

Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x.

Suggerimento. Trovare le x che soddisfano la diseguaglianza $(m_k - n_k x)^2 \leq \log \frac{1}{\epsilon}$. *Usare poi il fatto che per ogni x esistono razionali* m_k, n_k *tali che* $|x - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$. *Considerare a parte il caso x razionale.*

Esercizio 5. (i) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ in misura ma $\int |f_n| \geq 1$
(ii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma $\int |f_n| \geq 1$
(iii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma non in misura
(iv) Trovare $f_n : [0,2] \to \mathbf{R}$ tali che $f_n(x) \to 0 \ \forall x$ ma non in misura
Suggerimento. $f_n = \chi_{\cup_{j \geq n}}(Z + q_j)$...

Esercizio 6 . Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $f_n \geq 0$ funzioni sommabili. Provare che

$$\sup_n \int f_n < +\infty, \ \ f_n \to f \ \ q.o., \ \ \int_X f_n \, d\mu \ \to \ \int_X f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Suggerimento: $\qquad A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \quad \Rightarrow$
$\int |f_n - f| \leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X), \quad \circ(1) - \epsilon\mu(X) \leq \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \leq \circ(1) + \epsilon\mu(X)$

Funzioni sommabili: cenni di soluzione

Esercizio 2 Per Beppo Levi e numerabile additivitá dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|\chi_{[0,1]}\right]dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1|f(x+k)|dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_k^{k+1}|f(t)|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|f|<+\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|<+\infty$ per quasi ogni $x\in[0,1]$. Siccome $\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+n+k)|=\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|\quad\forall n\in\mathbf{Z}$ é infatti $\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|<+\infty$ per quasi ogni $x\in\mathbf{R}$ e tale funzione é per l'appunto 1-periodica.

Infine $\int_0^1|\sum_{-\infty}^{+\infty}f(x+k)|dx\le\int_{\mathbf{R}}|f|<+\infty$ e quindi, per periodicitá, g é sommabile su ogni intervallo limitato.

Esercizio 3 Effettuando un cambio di variabile ed utilizzando la periodicitá del coseno, troviamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos nx)^{n^4}dx=\frac{1}{n}\int_0^{n\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n^4}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n^4}dt$$

Siccome $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, vediamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n^4}dt=O(\frac{1}{n^2})$ e quindi, per Beppo Levi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}(\cos nx)^{n^4}\right]dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos nx)^{n^4}dx<+\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty}(\cos nx)^{n^4}<+\infty$ quasi per ogni $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ed infatti, per periodicitá, quasi per ogni x. Infine la serie diverge in ogni $x=\frac{2k\pi}{l},\ k,l\in\mathbf{N}$.

Esercizio 4. $\int_{-M}^{M}\frac{dx}{\sqrt{|x-r_n|}})\le 8\int_0^M\frac{dt}{\sqrt{t}}=16\sqrt{M}\quad\Rightarrow$

$$\sum_n\int_{-M}^{M}\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}\le 16\sqrt{M}\quad\Rightarrow\quad\int_{-M}^{M}[\sum_n\int_{-M}^{M}\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}]dx<\infty$$

$$\Rightarrow\quad\sum_n\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}<+\infty\quad \text{q.o.}x$$

Convergenza in media, q.o., in misura: cenni di soluzione

Esercizio 6 . Sia $I:=\int f,\quad A_{n,\epsilon}:=\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\epsilon\}$. Intanto

$$\mu(X)<\infty, f_n\to f\quad q.o.\quad\Rightarrow\quad f_n\to f\quad\text{in misura}\quad\Rightarrow\quad\mu(A_{n,\epsilon})\to_n 0$$

Quindi $\int_{A_{n,\epsilon}}f\to_n 0$ (assoluta continuitá dell'integrale) e quindi

$$\int|f_n-f|\le\int_{A_{n,\epsilon}}|f_n-f|+\epsilon\mu(X)\le 2\epsilon\mu(X)+\int_{A_{n,\epsilon}}f_n\quad\forall n\ge n_\epsilon.\quad\text{Ma}\quad\int_{A_{n,\epsilon}}f_n=$$

$$=I+\circ(1)-\int_{A^c_{n,\epsilon}}f_n\le I+\circ(1)-\int_{A^c_{n,\epsilon}}(f-\epsilon)\le\epsilon\mu(X)+\int_{A_{n,\epsilon}}f\le 2\epsilon\mu(X)\quad\forall n\ge n_\epsilon$$