

AM210/2012-13: Tracce delle lezioni- Settimana XII

Sistemi Conservativi, Hamiltoniani

Il sistema $\dot{x} = f(x)$ si dice *conservativo* se esiste un *integrale primo*, ovvero una $G \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tale che

$$\langle \nabla G(x), f(x) \rangle = 0 \quad \forall x, \quad \text{e quindi} \quad \dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}G(x(t)) = 0 \quad \forall t$$

cioé G é costante lungo le traiettorie (G si conserva durante il moto). Se le superfici di livello $\{G = \text{cost}\}$ sono limitate, le soluzioni del sistema sono definite per tutti i tempi. Un caso importante é dato dai *sistemi Hamiltoniani* a n gradi di libert a:

$$\dot{x} = H_y(x, y), \quad \dot{y} = -H_x(x, y)$$

ove $H \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $H = H(x, y)$, $x, y \in \mathbf{R}^n$ é *funzione Hamiltoniana*, o *energia totale*; l'Hamiltoniana é un integrale primo:

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = H_x(x(t), y(t))\dot{x} + H_y(x(t), y(t))\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} \equiv 0$$

Una importante classe di sistemi Hamiltoniani é data dai *sistemi Newtoniani conservativi*

$$(*) \quad \ddot{x} = -\nabla U(x) \quad x \in C^2(I, \mathbf{R}^n)$$

che descrivono il moto di un corpo sollecitato da un *campo di forze conservativo* $F = -\nabla U$. Posto $y = \dot{x}$, il *sistema del secondo ordine* (*) si riscrive in forma Hamiltoniana, con energia totale $H(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + U(x)$.

OSSERVAZIONE. Sia $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ un campo di vettori in \mathbf{R}^n . Se

$$\exists F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) : \quad f = \nabla F$$

F si dice **potenziale di f** e si dice che f deriva dal potenziale F (che, se $n = 1$, abbiamo chiamato primitiva) od anche che f é **un campo conservativo** .

Notare che se un potenziale F é anche unico, a meno di costanti additive. Inoltre, se $n = 1$, ogni f ammette primitiva, e cioé deriva da un potenziale. Tuttavia ci  non é pi  vero in generale se $n > 1$.

Infatti, se $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ e $f = \nabla F$, allora $J_f = \mathcal{H}_F$, e quindi dal Lemma di Schwartz segue che J_f é matrice simmetrica, ovvero che

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Osserviamo che la condizione necessaria data da Schwartz é anche sufficiente. Verifichiamolo nel caso $n = 2$.

Sia $a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, e quindi $a_y = b_x$. Determiniamo F .

Da $a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, troviamo, integrando, $F(x, y) = F(0, y) + \int_0^x a(s, y) ds$.

Ma $F(0, y) = F(0, 0) + \int_0^y F_y(0, t) dt = F(0, 0) + \int_0^y b(0, t) dt$ e quindi

$$F(x, y) = F(0, 0) + \int_0^y b(0, t) dt + \int_0^x a(s, y) ds$$

Siccome non abbiamo usato l'ipotesi $a_y = b_x$, una funzione siffatta non avrá in generale per gradiente il campo (a, b) . Mostriamo che ciò accade se $a_y = b_x$: per il TFC, risulta subito che $F_x(x, y) = a(x, y)$, mentre, per il teorema di derivazione sotto segno di integrale, da $a_y = b_x$ e, di nuovo, dal TFC, otteniamo

$$F_y(x, y) = b(0, y) + \int_0^x a_y(s, y) ds = b(0, y) + \int_0^x b_x(s, y) ds = b(0, y) + [b(x, y) - b(0, y)]$$

A FUTURA MEMORIA

Non é in generale vero che, se Ω é un aperto connesso in \mathbf{R}^2 , allora

$$a_y \equiv b_x \quad \text{in } \Omega \quad \Rightarrow \quad \exists F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}) : \quad \nabla F(x, y) = (a(x, y), b(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

DISEGUAGLIANZA DI GRONWALL

Sia $0 \leq \varphi \in C([0, T], \mathbf{R})$. Se

$$\text{esistono } A, B, C > 0 \text{ tali che } \varphi(t) \leq A + Bt + C \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T]$$

allora

$$\varphi(t) \leq (A + BC^{-1})e^{Ct} - BC^{-1} \quad \forall t \in [0, T]$$

Prova. Sia $\psi(t) := A + Bt + C \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$. Si ha: $\varphi(t) \leq \psi(t)$ e $\dot{\psi}(t) = B + C\varphi(t) \leq B + C\psi(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Dunque

$$\left(e^{-Ct} \psi(t) \right)' = e^{-Ct} (\psi'(t) - C\psi(t)) \leq B e^{-Ct}$$

Integrando in $[0, t]$, $t \in [0, T]$ otteniamo $e^{-Ct} \psi(t) \leq e^{-Ct} \psi(0) + \int_0^t B e^{-C\tau} d\tau$

$$\psi(0) - BC^{-1} (e^{-Ct} - 1) = (\psi(0) + BC^{-1}) - BC^{-1} e^{-Ct} = (A + BC^{-1}) - BC^{-1} e^{-Ct}$$

Problema di Cauchy: ESISTENZA GLOBALE. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Se

$$\exists B, C > 0 : \quad \|f(x)\| \leq B + C\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora le soluzioni del sistema differenziale $\dot{x} = f(x)$ sono definite globalmente.

PROVA. Sia $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ soluzione massimale. Integrando, troviamo

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(0)\| + \int_0^t \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \leq \|\gamma(0)\| + Bt + C \int_0^t \|\gamma(\tau)\| d\tau \quad \forall t < t^+$$

e allora, per Gronwall, $\|\gamma(t)\| \leq (\|\gamma(0)\| + BC^{-1})e^{Ct} - BC^{-1}$, $\forall t < t^+$ e quindi $t^+ = +\infty$ per una Proposizione vista. Se poi $\beta(t) := \gamma(-t)$, é $\dot{\beta}(t) = -\dot{\gamma}(-t) = -f(\gamma(-t)) = -f(\beta(t))$, $\forall t \in (-t^+, -t^-)$ e per quanto appena provato $-t^- = +\infty$.

Problema di Cauchy: DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI INIZIALI

(i) Sia $f \in Lip(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, cioè $\exists L > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$.
Se $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ allora

$$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| e^{Lt} \quad \forall t \geq 0$$

(ii) Sia $f \in Lip_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ e $\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \gamma^x(0) = x \quad \forall t \in [0, T]$. Sia $R := \sup_{t \in [0, T]} \|\gamma^x(t) - x\|$. Esiste $L > 0$ tale che, se $\|x - y\| \leq Re^{-LT}$, allora

$$t^+(\gamma^y) > T \quad e \quad \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \leq \|x - y\| e^{Lt} \quad \forall t \in [0, T]$$

Prova. (i) Intanto, γ e β sono definite per ogni t . Poi, siccome $\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq$

$$\|\gamma(0) - \beta(0)\| + \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\| d\tau \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| + L \int_0^t \|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\| d\tau$$

per ogni $t \geq 0$, basta applicare Gronwall a $\varphi(t) := \|\gamma(t) - \beta(t)\|$.

(ii) Se $\varphi \in C_0^\infty(B_{3R}(x))$, $\varphi \equiv 1$ in $B_{2R}(x)$, la $\tilde{f} := \varphi f$ é Lipschitziana di costante, diciamo, L e $\tilde{\gamma}^y$, soluzione del problema di Cauchy $\dot{\eta} = \tilde{f}(\eta)$, $\eta(0) = y$, é definita per tutti i tempi e $\|\tilde{\gamma}^y(t) - \tilde{\gamma}^x(t)\| \leq \|y - x\| e^{LT}$. Notiamo che $f \equiv \tilde{f}$ in $B_{2R}(x)$, $\gamma^x([0, T]) \subset B_R(x) \Rightarrow \gamma^x \equiv \tilde{\gamma}^x$ in $[0, T]$ e quindi

$$\|x - y\| \leq Re^{-LT} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{\gamma}^y(t)\| \leq \|\tilde{\gamma}^y(t) - \tilde{\gamma}^x(t)\| + \|\tilde{\gamma}^x(t)\| \leq \|y - x\| e^{LT} + R \leq 2R$$

per ogni $t \in [0, T]$ e quindi $\tilde{f}(\tilde{\gamma}^y(t)) = f(\tilde{\gamma}^y(t))$ e quindi $\gamma^y \equiv \tilde{\gamma}^y$ in $[0, T]$. Di qui la tesi.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ matrice $n \times n$. Siccome $\|\mathcal{A}x\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|$ le soluzioni del sistema differenziale lineare di n equazioni nelle n incognite $x_i(t)$

$$(*) \quad \dot{x} = \mathcal{A}x, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{in}x_n(t), \quad i = 1, \dots, n$$

sono definite per tutti i tempi (segue dal Teorema di esistenza globale).

NOTA. Lo stesso vale se $a_{ij} \in C(\mathbf{R})$ (*sistemi lineari a coefficienti variabili*). Infatti ogni sistema non autonomo, ovvero della forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{ove} \quad f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$$

si può riscrivere come sistema autonomo introducendo un nuovo campo così definito:

$$g \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}), \quad g(x, x_{n+1}) := (f(x, x_{n+1}), 1)$$

In effetti, se $\dot{y} = g(y)$, $y(t_0) = (x_0, t_0)$, allora $\dot{y}_{n+1} = 1$, $y(t_0) = t_0$ e quindi $y_{n+1} = t$ e quindi anche $\dot{y}_j(t) = f_j(y_1(t), \dots, y_n(t), t)$ $j = 1, \dots, n$.
ovvero, se $x =: (y_1, \dots, y_n)$, allora $\dot{x}_n(t) = f(x(t), t)$.

Viceversa, se $\dot{x} = f(x(t), t)$, e $x(t_0) = x_0$, posto $y(t) := (x(t), t)$ allora $\dot{y}(t) = (f(x(t), t), 1)$, $y(t_0) = (x_0, t_0)$ e $g(y(t)) = g(x(t), t) = (f(x(t), t), 1)$
ovvero $\dot{y}(t) = g(y(t))$.

In particolare, se $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, ove $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ é tale che

$$\forall T > 0 \quad \exists A(T), B(T) > 0 : \quad \sup_{|t| \leq T} \|f(x, t)\| \leq A(T) + B(T)\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora $x(t)$ é definita in \mathbf{R} . Infatti, se $y(t) = (x(t), t)$, $t < T$, da $\dot{y}(t) = g(y(t))$ segue

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + A(T)t + B(T) \int_0^t \|y(\tau)\| d\tau \quad \forall t < T$$

Per Gronwall, $\{y(t); t \in [0, T]\}$ é limitato e quindi $y(t)$ é prolungabile oltre T .

Proposizione L'insieme $\mathcal{N} := \{x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : Lx := \dot{x} - \mathcal{A}x = 0\}$ di tutte le soluzioni di (*) é un sottospazio lineare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione n .

Dobbiamo provare tre fatti:

1. \mathcal{N} é un sottospazio lineare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, ovvero **combinazioni lineari** $\alpha x(t) + \beta y(t)$ di soluzioni sono ancora soluzioni.

Ed infatti \mathcal{N} é il **nucleo dell' operatore lineare** L .

2. Esistono $x^i \in \mathcal{N}$, $i = 1, \dots, n$ **linearmente indipendenti**, (in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$) cioé esistono n soluzioni x^i tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i$.

Infatti, presi $v^i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \dots, n$ linearmente indipendenti e detta x^i la soluzione di (*) tale che $x^i(0) = v^i$, le x^i sono n soluzioni linearmente indipendenti.

3. Tali x^i **generano** \mathcal{N} : $\forall x \in \mathcal{N}, \exists c = (c_1, \dots, c_n) : x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) \quad \forall t$.
 Infatti, se x é soluzione, siano $c_i \in \mathbf{R}$ tali che $x(0) = \sum_{i=1}^n c_i v^i = \sum_{i=1}^n c_i x^i(0)$ e sia $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$. Siccome x e \hat{x} sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy, allora $x \equiv \hat{x}$ (per il Teorema di Picard).

Definizione. Un sistema di n soluzioni linearmente indipendenti x^i di (*) si chiama **sistema fondamentale** per (*).

Se x^i é sistema fondamentale, la matrice $\mathcal{X}(t) = (x^1, \dots, x^n) = (x_j^i(t))_{i,j=1,\dots,n}$ avente per colonne i vettori x^j si dice **matrice fondamentale**.

Notiamo che se $\dot{\mathcal{X}} := (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = (\dot{x}_j^i(t))_{i,j=1,\dots,n}$ é la matrice che ha per elementi le derivate degli elementi di \mathcal{X} , allora, con tale notazione,

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X}$$

Se $\mathcal{X}(t)$ é matrice fondamentale e $\mathcal{X}(0)$ é la matrice identità, cioé $\mathcal{X}(0) = (e_1, \dots, e_n)$ ovvero $x_j^i(0) = \delta_{ij}$, \mathcal{X} é **matrice principale**.

Se \mathcal{X} é matrice fondamentale allora le soluzioni di (*) si scrivono nella forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = \mathcal{X}(t)c \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n \quad (\text{Integrale Generale})$$

Se \mathcal{X} é matrice principale $\mathcal{X}(t)c$, $c \in \mathbf{R}^n$ é la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = c$.

Sistemi lineari a coefficienti costanti Data $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, sia

$$e^{\mathcal{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\mathcal{A}^n}{n!}$$

Tale serie converge nello spazio (di Banach) delle matrici $\mathcal{M}_{n \times n}$ dotato della norma

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\mathcal{A}x\|_2 \quad \text{perché} \quad \left\| \sum_{n=N}^{N+p} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N}^{N+p} \frac{\|\mathcal{A}\|^n}{n!} \leq \epsilon \quad \text{se } N \geq N_\epsilon, p \in \mathbf{N}.$$

Argomentando come per la serie esponenziale in \mathbf{C} si vede che

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A}}e^{\mathcal{B}}$$

Ne consegue che $e^{\mathcal{A}}e^{-\mathcal{A}} = \mathcal{I}d$ e quindi $e^{\mathcal{A}}$ é invertibile e $(e^{\mathcal{A}})^{-1} = e^{-\mathcal{A}}$. Inoltre,

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathcal{A}} = \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}$$

ovvero $e^{t\mathcal{A}}$ é soluzione del sistema differenziale (in forma matriciale) $\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X}$. Siccome $e^{t\mathcal{A}}$ é invertibile per ogni t , $e^{t\mathcal{A}}$ é matrice fondamentale (anzi, principale) per $\dot{x} = \mathcal{A}x$, che ha quindi come integrale generale $e^{t\mathcal{A}}x_0$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Definizione. Date $x^i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, $i = 1, \dots, n$ sia $\mathcal{X}(t) := (x_j^i(t))$. $W(t) := \det \mathcal{X}(t)$ si dice determinante **Wronskiano** delle x^i .

Se $\exists t_0 : W(t_0) \neq 0$ allora $x^i(t_0)$ sono n vettori di \mathbf{R}^n linearmente indipendenti e quindi le funzioni x^i sono linearmente indipendenti (in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$). Il viceversa é falso in generale, : x^i linearmente indipendenti non implica $\det(x_j^i(t)) \neq 0$ (anche solo per qualche t). Ad esempio, $x^1(t) = (1, t)$, $x^2(t) = (t, t^2)$ sono funzioni (vettori di $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$) linearmente indipendenti, ma $x^2(t) = tx^1(t) \quad \forall t$, cioé, per ogni t , $x^1(t)$ e $x^2(t)$ sono vettori (di \mathbf{R}^2) linearmente dipendenti e quindi il Wronskiano di x^1, x^2 , $\det(x_j^i(t))$ é nullo per ogni t ! Tuttavia

Proposizione 1. Siano $x^i, i = 1, \dots, n$ soluzioni di (*), $\mathcal{X}(t) := (x_j^i(t))$.

$\mathcal{X}(t)$ é matrice fondamentale $\Leftrightarrow \det \mathcal{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \Leftrightarrow (\mathcal{X}(t))^{-1}$ esiste $\forall t$

Prova. C'è solo da provare la prima \Rightarrow . Supponiamo, per assurdo, che esista t_0 tale che $W(t_0) = 0$ e quindi che i vettori $x^i(t_0)$ siano linearmente dipendenti: esistono c_i costanti non tutte nulle tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t_0) = 0$. Ora, se $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$, \hat{x} é soluzione che si annulla in t_0 , e quindi, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = \hat{x} \equiv 0$, cioé le x^i sono linearmente dipendenti.

Proposizione 2. Sia \mathcal{X} matrice fondamentale. Allora

$$(\mathcal{X}^{-1})' = -\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}$$

Infatti, come si vede subito, se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono matrici $n \times n$ di funzioni C^1 , allora $(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \dot{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \mathcal{A}\dot{\mathcal{B}}$, e quindi (detta \mathcal{O} la matrice nulla) $\mathcal{O} = (\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X})' \Rightarrow$

$$\mathcal{O} = (\mathcal{X}^{-1})'\mathcal{X} + \mathcal{X}^{-1}\dot{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}^{-1})'\mathcal{X} + (\mathcal{X}^{-1})\mathcal{A}\mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{X}^{-1})' + (\mathcal{X}^{-1})\mathcal{A} = \mathcal{O}$$

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

LA FORMULA DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Siano $a_{ij}, b_i \in C(\mathbf{R})$, $i, j = 1, \dots, n$, $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Sia \bar{x} soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b \quad (**)$$

Allora, se $\mathcal{N} = \text{Ker}L$ é lo spazio delle soluzioni del **sistema lineare omogeneo associato** $\dot{x} = \mathcal{A}x$, si ha che

$$x \in \mathcal{N} \Rightarrow (\bar{x} + x) = \mathcal{A}(\bar{x} + x) + b \Rightarrow \bar{x} + \mathcal{N} \subset \{x : \dot{x} = \mathcal{A}x + b\}$$

Viceversa, se y é soluzione di (**), allora

$$\dot{y} = \mathcal{A}y + b \Rightarrow (y - \bar{x}) = \mathcal{A}(y - \bar{x}) \Rightarrow y \in \bar{x} + \mathcal{N}$$

e quindi

$$\{x : \dot{x} = \mathcal{A}x + b\} = \bar{x} + \mathcal{N} \quad (\text{integrale generale di}) \quad (**)$$

Vogliamo ora dare una formula per ottenere una soluzione particolare del sistema non omogeneo a partire da una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato; in effetti, troveremo l'integrale generale di (**). Sia \mathcal{X} matrice fondamentale del **sistema lineare omogeneo associato** $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Allora

$$\begin{aligned} \dot{x} = \mathcal{A}x + b, \quad x(0) = 0 &\Rightarrow \mathcal{X}^{-1}b = \mathcal{X}^{-1}\dot{x} - \mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}x = \\ &= \mathcal{X}^{-1}\dot{x} + (\mathcal{X}^{-1})'x(t) = (\mathcal{X}^{-1}x)' \Rightarrow \\ \mathcal{X}^{-1}x(t) = \int_0^t \mathcal{X}^{-1}b \, d\tau &\Rightarrow x(t) = \mathcal{X} \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau) \, d\tau \end{aligned}$$

Verifichiamo che tale $x(t)$ é effettivamente soluzione: $\frac{d}{dt} \left(\mathcal{X} \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau) \, d\tau \right) =$

$$= \dot{\mathcal{X}} \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau) \, d\tau + \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t)b(t) = \mathcal{A} \left(\mathcal{X} \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau) \, d\tau \right) + b = \mathcal{A}x + b$$

Quindi, se $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}d$, la soluzione di (**), tale che $x(0) = x_0$ é data dalla

$$x(t) = \mathcal{X}(t) \left(x_0 + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau) \, d\tau \right) \quad \text{formula della variazione delle costanti}$$

SISTEMI A COEFFICIENTI COSTANTI : RIDUZIONE A FORMA CANONICA

Sia $e_i, i = 1, \dots, n$ base canonica di \mathbf{R}^n . Sia $\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ (matrice diagonale avente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ come elementi sulla diagonale principale). Il (piú semplice) sistema differenziale

$$\dot{x} = \mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)x \quad x(t) = ((x_1(t), \dots, x_n(t)))$$

é formato dalle n equazioni disaccoppiate $\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n.$

Il sistema ammette quindi le soluzioni $x^i = e^{\lambda_i t} e_i.$

Queste soluzioni sono a Wronskiano diverso da zero e quindi **formano un sistema fondamentale** e ogni soluzione é della forma

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t}), \quad c_i \in \mathbf{R} \quad (\text{Integrale Generale})$$

Se \mathcal{A} ha n **autovalori reali distinti**, allora \mathcal{A} ha una **base di autovettori** $v^i \in \mathbf{R}^n, i = 1, \dots, n.$ L'Integrale Generale del sistema $\dot{x} = \mathcal{A}x$ si scrive

$$\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i, \quad c_i \in \mathbf{R}$$

Per provarlo, introduciamo la matrice avente come colonne gli autovettori

$$\mathcal{P} := (v^1, \dots, v^n) = (v_j^i)_{i,j=1,\dots,n}$$

\mathcal{P} é invertibile e $\mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P} e_i = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} v^i = \lambda_i \mathcal{P}^{-1} v^i = \lambda_i e_i$ ovvero $\lambda_i e_i$ é la i -esima colonna di $\mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P}.$ Dunque

$$\mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P} = (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (\text{forma canonica})$$

Ma allora, se $\dot{x} = \mathcal{A}x$ e $y := \mathcal{P}^{-1}x,$ é $x = \mathcal{P}y$ e $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1} \dot{x}$ e quindi

$$\dot{y} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P} y = \mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y \quad \text{e quindi} \quad y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i$$

Quindi l'integrale generale di $\dot{x} = \mathcal{A}x$ si scrive appunto

$$\mathcal{P} \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i$$

In Appendice discuteremo la riduzione a forma canonica nel caso di autovalori multipli e/o complessi.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Consideriamo il problema di Cauchy: data $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, $t_0 \in \mathbf{R}$, trovare $\delta > 0$ e $y \in C^n((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ tale che

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), t), \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

$$y(t_0) = c_0, \quad y'(t_0) = c_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

Se y é una soluzione, allora $x_1 := y, x_2 := y', \dots, x_{n-1} := y^{(n-2)}, x_n := y^{(n-1)}$ risolvono il problema di Cauchy per il sistema differenziale del primo ordine associato

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n, t)$$

$$x_1(t_0) = c_0, \dots, x_n(t_0) = c_{n-1}$$

In particolare il problema di Cauchy dato ha al piú una soluzione, ed ha in effetti esattamente una soluzione ottenuta a partire dalla soluzione del problema di Cauchy per il sistema del primo ordine associato. Si estendono poi in modo ovvio i teoremi di esistenza globale validi per i sistemi del primo ordine. In particolare, se $a_j, j = 1, \dots, n$ sono funzioni continue in I , consideriamo l'equazione lineare di ordine n

$$(EDL) \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0$$

(EDL) ha soluzioni definite in I e tali soluzioni formano un sottospazio lineare di dimensione n di $C^n(I)$. Una base di tale spazio, diciamo y_1, \dots, y_n , si chiama Sistema Fondamentale. Un sistema di n soluzioni é un sistema fondamentale se e solo se

$$W(t) := \det \left(y_j^{(i-1)}(t) \right)_{i,j=1,\dots,n} \quad (\text{Wronskiano})$$

é diverso da zero per ogni t (equivalentemente: per qualche t). Se $y_j, j = 1, \dots, n$ é sistema fondamentale, allora le soluzioni di (EDL) sono tutte e sole le funzioni

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \quad c_j \in \mathbf{R} \quad \text{Integrale Generale}$$

Equazioni a coefficienti costanti

Qui i coefficienti a_j si assumono costanti. Posto $a_n := 1$, indichiamo

$$p(z) := \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad (\text{polinomio caratteristico})$$

$$D^j := \frac{d^j}{dx^j}, \quad p(D)[y] := \sum_{j=0}^n a_j D^j y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_0 y$$

$$(EDL) \text{ si scrive allora } p(D)[y] = 0$$

Determinazione di un Sistema Fondamentale

Nell'esempio piú semplice, $y' - \lambda y = 0$, le soluzioni sono date da $y = ce^{\lambda t}$ (qui é conveniente ammettere $y \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ e $\lambda \in \mathbf{C}$: $(f + ig)' := f' + ig'$; ad esempio $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$). Cerchiamo dunque soluzioni dell'equazione $p(D)[y] = 0$, della forma $y = e^{\lambda t}$. Vediamo che

$$D^j e^{\lambda t} = \lambda^j e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad p(D)[e^{\lambda t}] = \sum_{j=0}^n a_j D^j [e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = e^{\lambda t} p(\lambda) \quad \Rightarrow$$

$e^{\lambda t}$ é soluzione se e solo se $p(\lambda) = 0$ ovvero se λ é radice del polinomio caratteristico.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono n radici distinte del polinomio caratteristico, $e^{\lambda_j t}$, $j = 1, \dots, n$ sono soluzioni linearmente indipendenti (perché a Wronskiano diverso da zero) e quindi costituiscono un **Sistema Fondamentale**. Conseguentemente, se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono k zeri distinti di $p(z)$, $e^{\lambda_j t}$, $j = 1, \dots, k$ sono k soluzioni linearmente indipendenti.

Se λ é una radice reale di molteplicitá q di $p(z)$ (equivalentemente $p(\lambda) = p'(\lambda) = \dots = p^{(q-1)}(\lambda) = 0$) allora (EDL) ha le q soluzioni linearmente indipendenti

$$y_1 = e^{\lambda t}, \quad y_2 = te^{\lambda t}, \quad \dots \quad y_q = t^{q-1} e^{\lambda t}$$

Sia infatti $0 = p(\lambda) = p'(\lambda) = \dots = p^{(q-1)}(\lambda)$. Intanto

$$D^j [ty] = jD^{j-1}y + tD^j y \quad \Rightarrow$$

$$p(D)[te^{\lambda t}] = \sum_{j=0}^n a_j j D^{j-1} [e^{\lambda t}] + ta_j D^j [e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} (p'(\lambda) + tp(\lambda)) = 0$$

Dunque, $p'(\lambda) = 0 \Rightarrow p(D)[te^{\lambda t}] = 0$. Ragionando per induzione, supponiamo

$$0 = p(\lambda) = p'(\lambda) = \dots = p^{(k)}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad p(D)[t^j e^{\lambda t}] = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k$$

Ora, $p(D)[t^{k+1} e^{\lambda t}] = p(D)[tt^k e^{\lambda t}] =$

$$\sum_{j=0}^n a_j j D^{j-1} [t^k e^{\lambda t}] + ta_j D^j [t^k e^{\lambda t}] = p'(D)[t^k e^{\lambda t}] + p(D)[t^k e^{\lambda t}]$$

Sopponendo che $p^{(j)}(\lambda) = 0 \forall j = 0, \dots, k+1$ e quindi $(p')^{(j)} = 0 \forall j = 0, \dots, k$, dall'ipotesi di induzione applicata a p, p' segue quindi che $p(D)[t^{k+1} e^{\lambda t}] = 0$.

Nel caso in cui $\lambda = \alpha + i\beta$ sia uno zero complesso di molteplicitá p (e quindi é tale anche $\bar{\lambda}$), (EDL) ha le $2p$ soluzioni

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha t} \sin \beta t, & y_2 &= te^{\alpha t} \sin \beta t, & \dots & y_p &= t^{p-1} e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \hat{y}_1 &= e^{\alpha t} \cos \beta t, & \hat{y}_2 &= te^{\alpha t} \cos \beta t, & \dots & \hat{y}_p &= t^{p-1} e^{\alpha t} \cos \beta t \end{aligned}$$

Si ottiene in questo modo un sistema fondamentale.

COMPLEMENTI

Supponiamo adesso che \mathcal{A} abbia ancora tutti **autovalori distinti**, ma che abbia q **autovalori reali** μ_i , $i = 1, \dots, q$ e $2p \geq 2$ **autovalori complessi**, $q+2p = n$ (notiamo che se $\lambda = \alpha + i\beta$ é autovalore complesso allora anche $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo é, perché \mathcal{A} é matrice di numeri reali e quindi il suo polinomio caratteristico é a coefficienti reali).

Siano $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \dots, p$ e μ_i , $i = 1, \dots, q$ gli autovalori complessi e, rispettivamente, reali, di \mathcal{A} . A tali autovalori corrispondono n autovettori linearmente indipendenti, diciamo v^j, \bar{v}^j , $j = 1, \dots, p$, u^i , $i = 1, \dots, q$: notiamo che mentre $u^i \in \mathbf{R}^n$, i v^j sono vettori in \mathbf{C}^n (vettori a componenti complesse) e compaiono in coppie complesse coniugate giacché $\mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j \Leftrightarrow \mathcal{A}\bar{v}^j = \bar{\lambda}_j \bar{v}^j$ (la lineare indipendenza sussiste, nei fatti, in \mathbf{C}^n). Posto $\xi^j := \Re v^j$, $\eta^j := \Im v^j$ (ovvero $v^j = \xi^j + i\eta^j$, $\xi^j, \eta^j \in \mathbf{R}^n$), é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\xi^j + i\mathcal{A}\eta^j &= \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j = (\alpha_j + i\beta_j)(\xi^j + i\eta^j) = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j + i(\beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j) \Rightarrow \\ \mathcal{A}\xi^j &= \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j, \quad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j \end{aligned}$$

Sia ora

$$\mathcal{P} := (\xi^1, \eta^1, \dots, \xi^p, \eta^p, u^1, \dots, u^q)$$

la matrice ($n \times n$ reale) avente le prime $2p$ colonne formate dai vettori parte reale e coefficiente dell'immaginario degli autovettori corrispondenti ai λ_i e le rimanenti q colonne formate dagli autovettori reali. Ovviamente tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi \mathcal{P} é invertibile. Mostriamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} =$$

$$(\alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2, \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \dots, \alpha_p e_p - \beta_p e_{p+1}, \beta_p e_p + \alpha_p e_{p+1}, \mu_1 e_{2p+1}, \dots, \mu_q e_n)$$

($\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é qui, come altrove, descritta come n -upla di vettori colonna). É questa la **forma canonica di \mathcal{A} in presenza di autovalori distinti, reali o complessi**.

Verifichiamolo:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\xi^1 = \mathcal{P}^{-1}(\alpha_1 \xi^1 - \beta_1 \eta^1) = \alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\eta^1 = \mathcal{P}^{-1}(\beta_1 \xi^1 + \alpha_1 \eta^1) = \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2$$

e cosí via fino alle colonne di posto $2p-1$ e $2p$.

Per le rimanenti si trova invece $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_{2p+i} = \mu_i e_{2p+i}$.

Posto $y = (x, \xi, \eta) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, il sistema $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y$ si disaccoppia nelle q equazioni

$$\dot{x}_i = \mu_i x_i \quad i = 1, \dots, q$$

e nei p sistemi 2×2

$$\dot{\xi}_j = \alpha_j \xi_j - \beta_j \eta_j, \quad \dot{\eta}_j = \beta_j \xi_j + \alpha_j \eta_j, \quad \xi_j, \eta_j \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad j = 1, \dots, p$$

Posto $z_j(t) := \xi_j(t) + i\eta_j(t)$, $\dot{z}_j := \dot{\xi}_j + i\dot{\eta}_j$, il sistema si riscrive come

$$\dot{z}_j = (\alpha_j + i\beta_j)z_j$$

che ha le soluzioni

$$z_j = c \exp(\alpha_j t + i\beta_j t) = c e^{\alpha_j t} (\cos \beta_j t + i \sin \beta_j t), \quad c \in \mathbf{C}$$

Prendendo $c = 1, c = i$ otteniamo coppie di soluzioni in forma reale

$$\xi_j = e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, \quad \eta_j = e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \quad \xi_j = e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \quad \eta_j = -e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$$

Si ottengono così $2p + q$ soluzioni che, come é immediato verificare, sono a Wronskiano diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale per il sistema in forma canonica e che, applicando \mathcal{P} , fornisce un sistema fondamentale per il sistema dato $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Piú in generale, se \mathcal{P} é matrice invertibile e $\sum_{i=1}^n c_i y^i$ é Integrale Generale di $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P} y$, allora

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathcal{P} y^i$$

é Integrale Generale di $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Si tratta allora di trovare una matrice \mathcal{P} che riduca \mathcal{A} nella forma piú semplice possibile, la sua **forma canonica**.

Cosí abbiamo proceduto nel caso diagonalizzabile. Si puó procedere in questo modo anche quando, a causa della presenza di autovalori multipli, fosse impossibile diagonalizzare \mathcal{A} (ricordiamo che anche in presenza di autovalori multipli \mathcal{A} puó avere n autovettori linearmente indipendenti e quindi essere diagonalizzabile: é questo il caso se \mathcal{A} é simmetrica).

In tali casi la forma canonica risulterà però piuttosto complicata (forme di Jordan).

Ci limitiamo a considerare il caso

\mathcal{A} ha **un solo autovalore, reale, cui corrisponde un unico autovettore**.

Cominciamo dalla situazione piú semplice, cioè $n = 2$.

Sia dunque λ zero di molteplicitá 2 (**molteplicitá algebrica** di λ) del polinomio

caratteristico di \mathcal{A} , matrice 2×2 . Se la **molteplicitá geometrica** di λ , ovvero $\dim(\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}))$ é uguale alla molteplicitá algebrica di λ (cioé é 2) cioé a λ corrispondono due autovettori linearmente indipendenti, allora \mathcal{A} é, come sopra, diagonalizzabile.

Supponiamo quindi che λ abbia **un unico autovettore** v . Ció implica che

$$Im(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{h \in \mathbf{R}^2 : \exists u \in \mathbf{R}^2 \text{ tale che } \mathcal{A}u - \lambda u = h\}$$

é un sottospazio di dimensione 1: $Im(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tu : t \in \mathbf{R}\}$ per qualche $u \neq 0$. Di piú,

$$Im(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tv : t \in \mathbf{R}\}$$

Questo perché $\mathcal{A}u - \lambda u = tu \Rightarrow \mathcal{A}u - (\lambda + t)u = 0$ e quindi $t = 0$ (λ é l'unico autovalore!) e quindi u é un multiplo di v (v é l'unico autovettore!)

Dunque esiste u tale che $\mathcal{A}u - \lambda u = v$. In particolare, $u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2$ ed u si dice **autovettore generalizzato**. Sia ora

$$\mathcal{P} = (v, u)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore e l'autovettore generalizzato; ovviamente \mathcal{P} é invertibile. Si ha

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v = \mathcal{P}^{-1}\lambda v = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u + v) = \lambda e_2 + e_1$$

Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2)$$

É questa la **forma canonica** di \mathcal{A} . Il sistema associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{x} = \lambda x + y, \quad \dot{y} = \lambda y$$

Una soluzione di tale sistema é $y \equiv 0, x = e^{\lambda t}$. Una seconda soluzione é $y = e^{\lambda t}$ e quindi $(xe^{-\lambda t})' = 1$ e quindi $x = te^{\lambda t}$. Tali soluzioni sono a Wronskiano non nullo e quindi formano un sistema fondamentale. Dunque un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$ é dato da

$$\mathcal{P}(e^{\lambda t}e_1) = e^{\lambda t}v, \quad \mathcal{P}(te^{\lambda t}e_1 + e^{\lambda t}e_2) = te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$$

Argomenti analoghi si applicano al caso piú generale in cui la matrice $n \times n$ \mathcal{A} ha **un unico autovalore** λ (avente quindi **molteplicitá algebrica** n) avente **molteplicitá geometrica** 1, cioé $\mathcal{A}u = \lambda u$ ha una sola soluzione u_1 (a meno di multipli).

La proprietà chiave (che sussiste in effetti senza ipotesi sulla molteplicità geometrica di λ e che diamo senza dimostrazione) è la seguente:

$$(!) \quad Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n = \mathbf{R}^n \quad (!)$$

1. Una conseguenza di (!) è che

$$Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} \Rightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = \mathbf{R}^n$$

Infatti, $u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2} \Rightarrow 0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\mathcal{A}u - \lambda u)$
 $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u - \lambda u) = 0 \Rightarrow u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$.

2. Una conseguenza di $dim[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})] = 1$ è che

$$(+)$$

$$dim[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}] = dim[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k] + 1$$

se $Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$ è sottospazio proprio di $Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}$. Infatti, da

$$\exists u : \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = 0, \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(u) \neq 0$$

segue

$$0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(u) \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\alpha u) = u_1$$

per qualche $\alpha \neq 0$. Ugualmente $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\bar{u}) = 0 \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\beta\bar{u}) = u_1$
per qualche $\beta \neq 0$ e quindi $\alpha u + \beta\bar{u} \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$.

In particolare, da (!) e 1., segue che allora (+) vale per ogni $k < n$.

3. Una conseguenza di 2. è che

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}] = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$$

Intanto, $u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u - \lambda u) = 0$ cioè
 $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}] \subset Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$. Poi, usando 2.,

$$dim[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})] = 1 \Rightarrow dim[(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1})] =$$

$$= dim[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}] - 1 = dim[Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k]$$

Da 3. segue che esiste u_2 tale che $\mathcal{A}u_2 - \lambda u_2 = u_1$, e poi, iterando, per ogni $k < n$ esiste $u_{k+1} \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}$ tale che $\mathcal{A}u_{k+1} - \lambda u_{k+1} = u_k$.

Sia ora

$$\mathcal{P} = (u_1, \dots, u_n)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore u_1 e gli **autovettori generalizzati** u_k $k = 2, \dots, n$. Siccome

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_1 = \mathcal{P}^{-1}\lambda u_1 = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_k = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_k = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u_k + u_{k-1}) = \lambda e_k + e_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n$$

concludiamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, \lambda e_2 + e_1, \dots, \lambda e_n + e_{n-1})$$

ove $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é descritta come riga di vettori colonna. É questa la **forma canonica** per \mathcal{A} .

Ora, il sistema differenziale associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_1, \quad \dots, \quad \dot{y}_{n-1} = \lambda y_{n-1} + y_{n-2}, \quad \dot{y}_n = \lambda y_n$$

Iterando il calcolo effettuato nel caso $n = 2$ troviamo per tale sistema le n soluzioni

$$(e^{\lambda t}, 0, \dots, 0)$$

$$(te^{\lambda t}, e^{\lambda t}, 0, \dots, 0)$$

$$(t^2e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}, 0, \dots, 0)$$

.....

$$(t^{n-1}e^{\lambda t}, t^{n-2}e^{\lambda t}, \dots, e^{\lambda t})$$

Tali n soluzioni hanno Wronskiano evidentemente diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale da cui, applicando \mathcal{P} , si ottiene un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$.