AM210-2012-13: Tracce delle lezioni- IV Settimana

DIFFERENZIABILITÁ E MATRICE JACOBIANA

Siano $\quad O$ aperto in $\mathbf{R}^n, \quad f : O \to \mathbf{R}^m, \quad x_0 \in O$.
Si dice che f é **differenziabile** in x_0 se

$$\exists\, L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) : \qquad f(x_0 + h) \;=\; f(x_0) + Lh + \circ(\|h\|) \qquad (*)$$

(L trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$). Tale L, *se esiste é unica.* Infatti:

$(L_1 - L_2)(h) \;=\; \circ(\|h\|) \quad \Rightarrow \quad t(L_1 - L_2)(h) \;=\; (L_1 - L_2)(th) \;=\; \circ(|t|) \quad \Rightarrow$
$(L_1 - L_2)(h) = \circ(1) \quad \Rightarrow \quad (L_1 - L_2)(h) = 0 \quad \forall h.$

Notiamo inoltre che, essendo L continua, f **é continua in** x_0.

La trasformazione L in $(*)$ si chiama **differenziale** di f in x_0 e si indica $df(x_0)$. Scelte delle basi $e_j, \quad \hat{e}_i,\ j = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m$, la sua matrice rappresentativa si chiama **matrice Jacobiana** e si indica $J_f(x_0)$.

n=1: Cammini differenziabili.

Date $\quad \gamma_i : (a, b) \to \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, m. \quad \gamma := \sum_{i=1}^m \gamma_i \hat{e}_i \quad$ é *cammino* in $\mathbf{R}^m$. Siccome una funzione lineare $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ é completamente determinata dal suo valore in $1 : L(t) = L(t1) = tL(1)$, il cammino (o 'traiettoria') γ risulta differenziabile in $t \in (a, b)$ se

$$\text{esiste} \quad v = \sum_{i=1}^m v_i \hat{e}_i \quad \text{tale che} \quad \gamma(t + \tau) = \gamma(t) + \tau v + \circ(\tau)$$

ovvero

$$\forall i = 1, \ldots, m \qquad \exists \quad \dot{\gamma}_i(t) := \lim_{\tau \to 0} \frac{\gamma_i(t + \tau) - \gamma_i(t)}{\tau} = v_i$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t) := v$ é il **vettore tangente** (e, se $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$, $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$, é il **versore tangente**) al cammino γ in $\gamma(t)$; $\|\dot{\gamma}(t)\|$ é la velocitá con cui il punto che 'percorre' il cammino γ passa per $\gamma(t)$. I cammini (o 'traiettorie') dotati di vettore tangente si chiamano differenziabili.

UN ESEMPIO $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$ (equazione parametrica della circonferenza unitaria) é cammino differenziabile con $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$. Notiamo che $< \gamma(t), \dot{\gamma}(t) > \equiv 0$ e quindi, come si vede subito, $\dot{\gamma}(t)$, applicato in $\gamma(t)$, é il *versore*) alla circonferenza nel punto $\gamma(t)$.

m=1: Derivate direzionali, derivate parziali.

Sia $f : O \to \mathbf{R}$ differenziabile in $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Dati $h \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$, sia $\varphi(t) := f(x + th)$. Da

$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = df(x)(h) + \circ(1)$ se $|t| \leq \delta_h$ segue che esiste

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \frac{d}{dt} f(x + th)_{|t=0} = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = df(x)h$$

Tale quantitá si chiama **derivata di f in x nella direzione h**. In particolare,

$$(prendendo \quad h = e_i) \qquad \exists \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = df(x)e_i$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (che si scrive anche $f_{x_i}, \partial_i f, D_i f, \ldots$) si chiama **derivata parziale** di f fatta rispetto alla i-esima variabile. Il vettore

$$\nabla f(x) \ := \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

si chiama **gradiente** di f in x, ed é il vettore che rappresenta $df(x)$ (nella base e_i):

$$df(x)h \ = \ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i \ = < \nabla f(x)\ ,\ h >= \frac{\partial f}{\partial h}(x)$$

Se $\mathbf{m} > \mathbf{1}$, f differenziabile in x_0 $\Leftrightarrow$ $\frac{\| f(x_0+h) \ -[\ f(x_0)+df(x_0)h]\|}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{f_i(x_0+h) \ -[\ f_i(x_0)+<df(x_0)h,\hat{e}_i>]}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0 \quad \forall i$ $\Leftrightarrow$ f_i sono differenziabili con

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = df_i(x_0)e_j =< df(x_0)e_j, \hat{e}_i > \quad \text{e quindi} \quad J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$$

ovvero, $J_f(x_0)$ é la matrice che ha per righe i vettori $\nabla f_i(x_0)$.

Funzioni $C^1(O)$. Una funzione é $C^1(O)$ se le sue derivate parziali esistono e sono continue in O; $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é di classe $C^1(O)$ se lo sono le f_i.

Proposizione 1. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f **é differenziabile**.

Prova. Basta mostrarlo per funzioni scalari. Per semplicitá, lo dimostriamo per funzioni di due variabili. Da f_x, f_y continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \ |\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)| \ \leq \ \epsilon \quad \forall\, w, v \in B_\delta(u) \subset O$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau}f(\tau, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau}f(x,\tau) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\tau)$ otteniamo

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right] \right| =$$

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x,y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right| \le$$

$$\left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] d\tau \right|$$

$$\le \epsilon\,(|s| + |t|) \qquad \text{se} \quad s^2 + t^2 \le \delta_\epsilon^2$$

DERIVATE PARZIALI E DIFFERENZIABILITÁ: esempi e controesempi

(i) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2 + y^2 \ne 0$, $f(0,0) = 0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha anche derivate parziali, nulle, in $(0,0)$. Ma $\frac{\partial f}{\partial h}$ non esiste per alcun $h \ne e_i, i = 1,2$, perché $t \to f(tx,ty)$ non é continua in $t = 0$ (a meno che non sia $xy = 0$). In particolare, f non é continua in zero:

una funzione puó avere derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto.

Notiamo che: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{1}{y}$ $\forall y \ne 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0,0)$.

(ii) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

É $\frac{f(tx,ty)}{t} = \frac{x^2 y}{t^2x^4+y^2} \to_{t\to 0} \frac{x^2}{y}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \frac{h_1^2}{h_2}$ $\forall\, h = (h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x,x^2) \equiv \frac{1}{2}$, vediamo che

una funzione puó essere derivabile, in un punto, lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iii) $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6+y^2}$, se $x^2 + y^2 \ne 0$, $f(0,0) = 0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha derivate parziali, nulle, anche in $(0,0)$. Inoltre, in $(0,0)$, f **é derivabile in tutte le direzioni**: $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_t \frac{f(tx,ty)}{t} = \lim_t \frac{tx^3y}{t^4x^6+y^2} = 0$. Tuttavia f **non é continua** in $(0,0)$, perché $f(x,x^3) \equiv \frac{1}{2}$. Dunque

una funzione puó avere derivate nulle lungo tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

(iv) $\quad f(x,y) = \frac{x^3y\sqrt{x^2+y^2}}{x^6+y^2} \quad$ se $\quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$

ha derivata nulla in tutte le direzioni, ed é anche continua, in $(0,0)$, ma non é differenziabile in $(0,0)$, perché $\quad \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y}{x^6+y^2} \quad$ non va a zero al tendere di x^2+y^2 a zero (vale infatti $\frac{1}{2}$ lungo la cubica $y = x^3$). Dunque

una funzione continua puó avere derivate nulle in tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

ESERCIZI E COMPLEMENTI

PROPOSIZIONE Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ uniformemente continua in $A \subset X$.

Allora esiste $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $\overline{f}(x) = f(x)\ \forall x \in A$.

Prova. Caso $m = 1$. Fissato $\epsilon > 0$, sia δ_ϵ tale che $d(x,y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Dato $x \in \overline{A}$, esistono $x_k \in A$ tali che $x_k \to_k x$. In particolare, x_k é di Cauchy, cioé $d(x_h, x_k) \leq \delta_\epsilon$ per h, k grandi. Quindi, per uniforme continuitá, $|f(x_k) - f(x_h)| \leq \epsilon$ e quindi $f(x_h)$ é di Cauchy e quindi converge a qualche y. Notiamo che tale y dipende solo da x e non dalla 'approssimante' x_k. Infatti, se $x'_k \to x$ e quindi, come sopra, $f(x'_k) \to y'$ per qualche y', si ha $|y - y'| \leq |y - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x'_k)| + |f(x'_k - y'| \to_k 0$ e quindi $y = y'$. Dunque $\overline{f}(x) := \lim_k f(x_k)$ é ben definita su $\overline{A}$.
Resta da provare che $\overline{f}$ é continua. Ma questo si vede subito: $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(y)| \leq 2\epsilon + |f(x_n) - f(y_n)|$ se n é abbastanza grande. Siccome poi, se $d(x,y) \leq \delta_\epsilon$, risulta $d(x_n, y_n) \leq 3\delta$ se n é grande, si ha che $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \epsilon$ se n é grande. In conclusione, $|f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon$. Se $m > 1$, l'argomento precedente assicura che ogni componente ha una estensione continua a $\overline{A}$ e quindi f si prolunga a tutto $\overline{A}$.

A1 Sia $f : E \to \mathbf{R}$. f si dice *localmente costante in* E se

$$\forall x \in E, \quad \exists B_r(x) \quad \text{tale che} \quad f \text{ é costante in } B_r(x) \cap E$$

Notiamo che una funzione siffatta é necessariamente continua in E.

A2 $\quad$ **f localmente costante in E connesso per archi $\Rightarrow$ f é costante in E.**

Prova. Sia, per ogni $x \in E$, $B_{r(x)}(x)$ tale che f sia costante in $B_{r(x)}(x)$. Siano $x, y \in E$ e sia γ cammino da x a y. Notiamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un intervallo, perché

$f \circ \gamma$ é continua. Estraendo da $\{B_{r(x)}(x) : \quad x \in \gamma([0,1])\}$, ricoprimento aperto del compatto $\gamma([0,1])$, un sottoricoprimento finito, deduciamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un insieme finito di punti, che, trattandosi di un intervallo, deve ridursi a un punto.

B Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ 'curva parametrica' in $\mathbf{R}^n$ e $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ biiezione. Allora $\tilde{\gamma}(\varphi(\tau)) : \tau \in [\alpha,\beta]$ é riparametrizzazione della 'curva' (o 'cammino') γ. Ovviamente le immagini ('sostegno' delle 'curve' γ e $\tilde{\gamma}$) $\gamma([a,b])$ e $\tilde{\gamma}([\alpha,\beta])$ coincidono: le due curve descrivono (percorrono..) in modo diverso lo stesso insieme di $\mathbf{R}^n$. Mostrare che, se γ é cammino differenziabile e φ é derivabile, con $\varphi(\tau) > 0 \quad \forall \tau$, allora γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso versore tangente in ogni punto.

CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE

Caso $\mathbf{n=1}$. Sia dapprima γ grafico cartesiano in $\mathbf{R}^2$:

$$\gamma(t) = (t, f(t)),\ t \in (a,b) \qquad \gamma((a,b)) = \mathcal{G}_f$$

La differenziabilitá di γ equivale alla derivabilitá di f. I punti

$\gamma(t) + \tau\dot{\gamma}(t) = (t+\tau, f(t) + \tau f'(t)), \quad \tau \in \mathbf{R}$ sono i punti della retta tangente a γ:

eliminando il parametro τ troviamo infatti $y = f(t) + f'(t)(x-t)$. $\dot{\gamma}$ é in tal senso vettore tangente in $\gamma(t)$ a γ.
Piú in generale, γ é differenziabile in t significa che $\gamma(t+\tau) - [\gamma(t) + \tau\dot{\gamma}(t)] = \circ(\tau)$, cioé la curva γ é approssimata, con un errore di ordine superiore al primo, dalla retta $\mathbf{R}\dot{\gamma}(t)$ traslata in $\gamma(t)$, che é quindi la retta tangente a γ in $\gamma(t)$.

Se $\mathbf{n=k} \leq \mathbf{m}$, $X = X(t_1,\ldots,t_k) = (X_1(t_1,\ldots,t_k),\ldots,X_m(t_1,\ldots,t_k))$ parametrizza una $k-$superfice in $\mathbf{R}^m$. Le curve su tale superfice, date da

$$t \to X(t, t_2, \ldots, t_k), \ldots, t \to X(t_1, \ldots, t)$$

determinano k vettori tangenti alla k-superfice, le k colonne di J_X, che indichiamo $\frac{\partial X}{\partial t_j} = (\frac{\partial X_1}{\partial t_j}, \ldots, \frac{\partial X_m}{\partial t_j})$.

Caso $\mathbf{m=1}$. L'esistenza della derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ equivale alla differenziabilitá del cammino $\gamma(t) = (x+th, f(x+th))$ risultando $\dot{\gamma}(t) = (h, \frac{\partial f}{\partial h}(x))$. La curva γ é l'intersezione del grafico di f con il piano (in $\mathbf{R}^3$ se $n=2$) passante per $(x, f(x))$ e per la retta $x + \mathbf{R}h$; il vettore $(h, \frac{\partial f}{\partial h}(x))$, applicato in $(x, f(x))$ é vettore tangente a tale retta, e quindi al grafico di f, $\mathcal{G}_f$. Al variare di h si ottengono tutti i vettori tangenti al grafico. Siccome $\frac{\partial f}{\partial h}(x) = < \nabla f(x)\ , \ h >$, l'insieme di tali vettori,

$$\{(h, < \nabla f(x)\ , \ h >) : \quad h \in \mathbf{R}^n\}$$

descrive un piano che, traslato in $(x, f(x))$, é il piano tangente a $\mathcal{G}_f$ in $(x, f(x))$. Ció si legge direttamente in $f(x) = f(x_0)+ < \nabla f(x_0), x - x_0 > + \circ (\|x - x_0\|)$ $(x := x_0 + h,)$: il 'piano' $T_f(x_0) := \{(x, f(x_0)+ < \nabla f(x_0), x - x_0 >)\}$, ovvero

$$z = f(x_0)+ < \nabla f(x_0), x - x_0 >$$

approssima il grafico di f, in un intorno di $(x_0, f(x_0))$, con un errore di ordine superiore al primo: $T_f(x_0)$é il **piano tangente a $\mathcal{G}_f$ in** $(x_0, f(x_0))$.
Sezionando $\mathcal{G}_f$ e $T_f(x_0)$ con il piano $z = f(x_0)$ e proiettando tali sezioni sul piano $z = 0$, otteniamo la *'superfice' di livello* $\Sigma := \{x : f(x) = f(x_0)\}$ e la corrispondente **'retta' tangente** in x_0, data appunto da $< \nabla f(x_0), x - x_0 >= 0$. Che il gradiente di f in x_0 sia *ortogonale* alle 'superfici' di livello lo si vede scrivendo queste (quando possibile) in forma parametrica $X = X(t_1, \ldots, t_n)$, cosicché $f(X(t)) \equiv f(x_0)$, da cui, derivando $(t := (t_1, \ldots, t_n))$,

$$0 = \frac{\partial f(X(t_1, \ldots, t_n))}{\partial t_j} =< \nabla f(X(t)), \frac{\partial X}{\partial t_j} > \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Infine, ∇f é direzione di massima pendenza del grafico di f in $(x, f(x))$:

$$\frac{d}{dt} f(x + th) =< \nabla f(x + th), h > \qquad \text{e} \qquad \sup_{\|h\|=1} < \nabla f(x), h >= \|\nabla f(x)\|$$