AM210: Tracce delle lezioni- VII Settimana
Calcolo dell'integrale di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \textbf{(integrale di Dirichlet)}$$

Abbiamo giá visto che, essendo $f(x,t) := \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$, $f_x = -e^{-tx}\sin t$ continue ed equidominate da $g(t) := e^{-t\underline{x}}$ in $[\underline{x}, +\infty) \times (0,\infty)$ per ogni $\underline{x} > 0$, si ha

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\, dt$$

Poi, integrando (due volte) per parti si ottiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt \;=\; -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{e quindi} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt := \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

perché $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = 0$. Basta quindi provare che

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt$$

cioé che $h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ é continua in $x = 0$. Il Teorema sulla dipendenza continua non si applica tuttavia in questo caso, perché *manca l'equidominatezza fino a zero*: $\exists g \geq 0$ tale che $\int_0^{\infty} g < \infty$ e $|\frac{\sin t}{t} e^{-tx}| \leq g(t)$ $\forall x > 0$ $\Rightarrow$

$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} g dt < \infty$, mentre si sa che $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$.

Se $G(t) := \int_0^{t} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$, esiste finito $G(\infty) := \lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$. Quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$ e G é limitata: $\exists M$ tale che $|G(t)| \leq M$ $\forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x\int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds \to_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\text{perché} \quad \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds \quad \text{e}$$

$$|\int_0^{\delta} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds| \leq 2M[1 - e^{-\delta}] \qquad \int_\delta^{\infty} |G(\frac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon \text{ se } \frac{\delta}{x} \geq t_\epsilon$$

La funzione Γ di Eulero e la formula di Stirling

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \quad s > 0$$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} < +\infty \quad \forall s > 0$ e $e^{-t}\, t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{t}$.
Inoltre, $(t,s) \to t^{s-1} e^{-t}$ é equidominata per $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$, $0 < \underline{s} < 1 < \overline{s}$, dalla funzione

$$f(t) = t^{\underline{s}-1}\, e^{-t} \text{ per } t \le 1, \qquad f(t) = t^{\overline{s}-1}\, e^{-t} \text{ per } t \ge 1.$$

Quindi $\Gamma(s)$ é continua. Poi, siccome $\frac{\partial}{\partial s} t^{s-1}\, e^{-t} = t^{s-1} \log t\, e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \log t\, e^{-t}\, dt, \quad s > 0.$
Γ é infatti C^∞. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, (\log t)^2\, e^{-t}\, dt > 0.$

Esempio 1. Effettuando il cambio $t = \tau^2$ e quindi integrando per parti, troviamo

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty \tau e^{-\tau^2} \tau d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$$

Esempio 2. Integrando per parti,

$$s\Gamma(s) = s \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = \Gamma(s+1)$$

In particolare, siccome $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Il *comportamento asintotico di* $n!$ é descritto dalla

Formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) = s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \circ(1) \right], \qquad \circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$$

Dimostrazione della Formula di Stirling.: Posto $t = s\tau$, troviamo

$$\Gamma(s+1) := \int_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = s^s \int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} s d\tau = s^{s+1}\, e^{-s} \int_0^\infty e^{s - s(\tau - \log\tau)}\, d\tau$$

e ponendo poi $\quad t=\tau-1,\, h(t)=t-\log(t+1)$, troviamo

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-sh(t)}\, dt$$

Notiamo che

$$h(t)=\tfrac{t^2}{2}(1+\epsilon(t)) \quad \text{ove} \quad \lim_{t\to 0}\epsilon(t)=0, \qquad h''(t)>0 \quad \forall t \quad \text{e quindi}$$

$$0<\beta<<1 \Rightarrow h(\pm\beta)\geq \tfrac{\beta^2}{4}.\ \text{Inoltre,} \quad (\tfrac{h(t)}{t})' = \tfrac{(t+1)\log(t+1)-t}{t^2(t+1)} \geq 0 \quad \forall t\geq -1.$$

Quindi

$$h(t)\geq \frac{h(\beta)}{\beta}t \geq \frac{\beta}{4}t \quad \forall t\geq\beta, \qquad h(t)\geq \frac{h(-\beta)}{-\beta}t\geq -\frac{\beta}{4}t \quad \forall t\in[-1,-\beta]$$

Per determinare il comportamento asintotico di $\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-sh(t)}\, dt$ osserviamo che

$$\int\limits_{-1}^{-\beta} e^{-sh(t)}\, dt \leq \int\limits_{-1}^{-\beta} e^{s\frac{\beta}{4}t}\, dt \leq \tfrac{4}{\beta s} e^{-s\frac{\beta^2}{4}} \qquad \text{e} \qquad \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-sh(t)}\, dt \leq \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-s\frac{\beta}{4}t}\, dt = \tfrac{4}{s\beta} e^{-s\frac{\beta^2}{4}}$$

decadono esponenzialmente a zero (per s che va a $+\infty$) mentre, effettuando il cambio di variabile $t\sqrt{s}=x$, troviamo

$$\int\limits_{-\beta}^{\beta} e^{-sh(t)}\, dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int\limits_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})}\, dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \circ(1)\right]$$

con $\circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$ perché

$$\int\limits_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]} \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \circ(1)$$

giacché la famiglia di funzioni $\quad x\to e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}, \quad x\in\mathbf{R}$ converge (uniformemente sui compatti al tendere di s all'infinito) alla funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ed é equidominata:

$$e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]} \leq e^{-\frac{x^2}{4}}$$

.

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Indicheremo con supp(f), $\quad f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la chiusura dell'insieme $\{x : f(x)\neq 0\}$. Indicheremo con $C_0(\mathbf{R}) := \{f\in C(\mathbf{R}) : \quad \mathrm{supp}(f)$ é compatto$\}$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue a supporto compatto.

In $C_0(\mathbf{R})$ sono definite le norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|, \quad \|f\|_1 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx.$

Per ogni $f, g\in C_0(\mathbf{R})$ é definita in $\mathbf{R}$ la funzione

$$(f*g)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

Tale operazione tra funzioni si chiama *prodotto di convoluzione* e la funzione $f*g$ é detta, semplicemente, *convoluzione* tra f e g.

Proposizione

(i) $\quad f*g\in C_0(\mathbf{R}) \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R})$

(ii) $\quad$ L'applicazione $\quad (f,g)\to f*g \quad$ é bilineare e simmetrica.

(iii) $\quad$ Se $g\in C_0(\mathbf{R})\cap C^k$ allora $f*g\in C^k(\mathbf{R}) \quad \forall f\in C_0(\mathbf{R})$.

(iv) $\quad \|f*g\|_\infty \le \|g\|_1\,\|f\|_\infty \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R})$

(v) $\quad \|f*g\|_1 \le \|g\|_1\,\|f\|_1 \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R}) \quad$ (**Diseguaglianza di Young**)

Prova

(i) Che $f*g$ sia continua deriva dal fatto che $(x,y)\to f(x-y)g(y)$ é continua ed equidominata: $\quad |f(x-y)g(y)|\le \|f\|_\infty|g(y)| \quad \forall x,y\in\mathbf{R}$.
Poi, se $\quad |x|\ge R \Rightarrow f(x)=g(x)=0 \quad$ allora

$$|x|\ge 2R,\ |y|\le R \quad \Rightarrow |x-y|\ge R \quad \Rightarrow \quad f(x-y)=0 \quad \Rightarrow$$

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy \;=\; \int\limits_{-R}^{R} f(x-y)g(y)\,dy \;=0$$

In effetti, supp$(f*g)\subset$ supp (f) + supp (g), ove, se $A,B\subset\mathbf{R}$, allora $A+B := \{a+b : \quad a\in A, b\in B\}$.

(ii) La bilinearitá é evidente. La simmetria segue dal cambio di variabile $t = x - y$:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt \;=\; (g * f)(x)$$

(iii) É una conseguenza del Teorema di derivazione sotto segno di integrale: $g \in C_0 \cap C^1 \quad \Rightarrow \quad |f(y)g'(x-y)| \leq \|g'\|_\infty |f(y)| \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) \;=\; \frac{d}{dx}(g * f)(x) \;=\; \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{dg}{dx}\, (x-t)dy$$

Piú in generale

$$g \in C_0^k \quad \Rightarrow \quad f * g \in C^k \quad \text{e} \quad \frac{d^j}{dx^j}(f * g)(x) \;=\; (f * \frac{d^j g}{dx^j})(x) \qquad \forall j \leq k$$

(iv) $\quad |(f * g)(x)| :\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\, dy \;\leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy$

(v) $\quad$ Per Fubini e l'invarianza dell'integrale per traslazione,

$$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f*g|(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \right) dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy \right) \;=\; \|f\|_1\, \|g\|_1$$

NOTA. $f * g$ é definita anche se solo f (o g) é a supporto compatto. In tal caso peró $f * g$ non sará piú a supporto compatto, mentre (ii) continua a valere e la (iii) vale per ogni $g \in C^k$.

Esercizio. Provare che se $f \in C_0$ e p é un polinomio di grado n, allora $f * p$ é un polinomio di grado n.

Scriviamo $p(x-y) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-y)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k(y) x^k$ e quindi

$$(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(x-y)dy = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)b_k(y)dy \right) x^k$$

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$, $\varphi \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).
Sia $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora $f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} f$ uniformemente sui limitati.

Infatti, $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq R\epsilon$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy = 1$, e quindi $|x| \leq M \Rightarrow$

$$|f(x) - (f * \varphi_\epsilon)(x)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \right| \leq$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \leq \sup_{|x|\leq M,\, |x-y|\leq R\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

perché f é uniformemente continua in $[-R-\epsilon, R+\epsilon]$.

CONVOLUZIONE in $C_{2\pi}$

Sia $C_{2\pi} := \{f \in C(\mathbf{R}), f(t+2\pi) = f(t)\ \forall t\}$. Date $f, g \in C_{2\pi}$, é definita

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds, \qquad \forall f, g \in C_{2\pi}$$

Prime proprietá: $f * g = g * f$ é continua e 2π-periodica; infatti, cambiando variabile $t - s = \sigma$, troviamo

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = (g * f)(t)$$

perché $h \in C_{2\pi}(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt = h(x+\pi) - h(x-\pi) \equiv 0 \quad \Rightarrow$

$$\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)dt$$

Proposizione Sia $P_N := \sum_{n=0}^N a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)ds$ un polinomio trigonometrico. Se $f \in C_{2\pi}$ e P_N é polinomio trigonometrico, allora $f * P_N$ é un polinomio trigonometrico.

Basta osservare che $(f * P_N)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s) \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) ds =$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(nt - ns) ds + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(nt - ns) ds$$

e che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(nt - ns) ds = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)[\cos(nt) \cos(-ns) - \sin(nt) \sin(-ns)] ds =$ $\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds\right) \cos(nt) + \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds\right) \sin(nt)$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(nt - ns) ds = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)[\sin(nt) \cos(-ns) + \sin(-ns) \cos(nt)] ds =$ $\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds\right) \sin(nt) - \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds\right] \cos(nt)$

Approssimazione per convoluzione Siano $g_k \in C_{2\pi}$ tali che

(i) $g_k(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$

(ii) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_k(t) dt = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$

(iii) $g_k \to_k 0$ uniformemente in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \qquad \forall \delta \in (0, \pi)$

Allora

$$\|f * g_k - f\|_\infty \to_k 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}$$

Prova. $|(f * g_k)(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi} |\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s) g_k(s) ds - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) g_k(s) ds| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)| g_k(s) ds + 2\|f\|_\infty \epsilon \qquad \forall k \geq k(\delta, \epsilon)$$

Se si é scelto δ abbastanza piccolo di modo che

$$|s| \leq \delta, t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow |f(t-s) - f(t)| \leq \epsilon$$

(possibile perché f, essendo continua e periodica é uniformemente continua in $\mathbf{R}$), si conclude che

$$|(f * g_k)(t) - f(t)| \leq \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty)$$