AM210 2012-2013: I ESONERO

TEMA 1. Sia V spazio vettoriale sui reali.

a) Sia $b(u,v)$ prodotto scalare in V. Enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz ad esso associata e dedurre che $\sqrt{b(u,u)}$ é una norma su V.

b) Sia $V := \{f \in C_0([0,+\infty)) : \int_0^\infty |f|^2 < +\infty\}$. Provare che $b(f,g) := \int_0^\infty fg$ é un prodotto scalare su V e dedurre, usando Cauchy-Schwartz, che

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right]^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2 \qquad \forall f \in V$$

c) Dedurre che

$$\int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \qquad \forall f \in C^1([0,\infty)) \quad \text{con} \quad f(0) = 0$$

ESERCIZIO 1.

Provare che tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti.
Mostrare che in l^∞ esistono norme che non sono tra di loro equivalenti.

TEMA 2 Siano $O_\alpha \subset \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathcal{J},$ insiemi aperti. Provare che

(a) esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{J}} O_\alpha = \bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} O_{\alpha_j}$

(b) Se $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{J}} O_\alpha$ é chiuso e limitato, allora

$$\exists p \in \mathbf{N}, \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p : \qquad E \subset \bigcup_{j=1}^{p} O_{\alpha_j}$$

ESERCIZIO 2. Dato $n \in \mathbf{N}$, sia e_n la successione di numeri reali cosí definita:

$$e_n(j) = 0 \quad \text{se} \quad j \neq n, \quad e_n(n) = 1.$$

(a) Sia $x_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} e_j$. Stabilire se x_n ha una estratta convergente in l^1 e/o in l^∞

(b) Mostrare che in l^∞ esistono famiglie non numerabili di aperti disgiunti.

TEMA 3 Sia $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Provare che

(i) $\forall R > 0, \exists x_R : \quad \|f(x_R)\| = \sup\limits_{\|x\| \le R} \|f(x)\|$
(ii) $E \subset \mathbf{R}^n$ connesso (connesso per archi) $\Rightarrow f(E)$ é connesso (connesso per archi)

ESERCIZIO 3. (i) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $E := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che $f(x, y) \neq 0\}$. Mostrare che se f é un polinomio di grado 3 allora E é sconnesso, mentre ció non é in generale vero se f é un polinomio di grado 2.

(ii) Mostrare che: $A \subset \mathbf{R}^n, \quad \overline{A} = intA \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = \mathbf{R}^n$.

TEMA 4. Sia $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Provare che:

(i) f é differenziabile in $O \quad \Rightarrow \quad f_i$ é differenziabile in $O \quad \forall i = 1, \dots, m$

(ii) f é differenziabile in $O \quad \Rightarrow \quad \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in $O \quad \forall i, j$

(iii) se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ esistono e sono continue in $O \quad \forall i, j$ allora f é differenziabile in O

ESERCIZIO 4. Discutere continuità e differenziabilità delle seguenti funzioni

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2}{x^4 + y^4} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2) - x^2 - y^2}{x^4 + y^4} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

TEMA 5 Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Sia $\gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$.

Provare che $f \circ \gamma \in C^1(\mathbf{R})$ e $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)$.

Dedurre che, se $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $\Sigma := \{x : \ f(x) = 0\}, \gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, allora

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(t) \in \Sigma \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma}(0) \text{ é ortogonale a } \nabla f(0).$$

ESERCIZIO 5. Calcolare il Laplaciano in coordinate polari in $\mathbf{R}^2$.