Esercitazione del 19-10

1. Discutere continuità e differenziabilità delle seguenti funzioni

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\, e^{y^2+\cos x} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2+y^2) - x^2 y - 1}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|(x,y)|^\gamma} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

al variare di $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

2. Definiamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

$$E := (1,0) \cup \Big\{(t,0), \quad (1/n, t) \ \ t \in [0,1)\,, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\Big\}.$$

Dimostrare che E non è aperto, non è chiuso, è connesso, non è connesso per archi. Dimostrare che $\bar{E}$ è connesso per archi.

3. Mostrare con degli esempi in $\mathbb{R}^n$ che non è vero che l'unione infinita di chiusi è chiusa e l'intersezione infinita di aperti è aperta.

4. Siano dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}^n$. Si definisca $\text{dist}(A,B) := \inf_{a \in A,\ b \in B} |a-b|$. Supponiamo che $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che se A è chiuso e B è compatto allora $\text{dist}(A,B) > 0$. Mostrare con un esempio che il risultato è falso se B è solo chiuso. Dimostrare che se A e B sono strettamente convessi, A è chiuso e B è compatto allora $\exists! a_0 \in A, b_0 \in B$ tali che $\text{dist}(A,B) = |a_0 - b_0|$.