Università degli Studi Roma Tre a.a 2012/2013

AM 210 - Analisi Matematica 3

Tutorato 1 del 12 Ottobre 2012

Tutori: Andrea Gullotto e Emanuele Padulano

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\lim_{|(x,y)|\to\infty} \frac{\sin(x^3)}{x^2+y^4}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+(x^2+y^2)\cos(x^4+y^7)}{x^2+y^2}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$

Esercizio 2. Sia X lo spazio delle successioni reali. Provare che $\forall x \in X$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ si ha $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Dedurne che $\ell^p \subseteq \ell^q$, $\forall\ 1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Esercizio 3. Sia $x_n(k) := \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$, $k \in \mathbb{N}$. Calcolare $\|x_n\|_1$, $\|x_n\|_2$, studiare la convergenza di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ_1, ℓ_2 e dedurre che le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ non sono equivalenti.

Esercizio 4. Sia $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni definita come

$$x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

1. Provare che $x_n \in \ell^p\ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Provare che $\{x_n\}$ è una successione limitata in $\ell^p\ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$, cioè

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < \infty\ \ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$$

3. Provare che $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti in ℓ^p per alcun $1 \leq p \leq \infty$

Esercizio 5 (il Teorema di Pitagora). Provare che

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \langle x, y\rangle = 0$$

Esercizio 6 (la regola del Parallelogramma). Provare che

$$\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2},\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$