Università degli Studi Roma Tre a.a 2012/2013

AM 210 - Analisi Matematica 3

Tutorato 2 del 19 Ottobre 2012

Tutori: Andrea Gullotto e Emanuele Padulano

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x^2}e^{3y^2}-1}{x^2+y^2}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(4xy^{\frac{3}{2}}\right)}{x^2+y^2}$

Esercizio 2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbb{R}^2$)

1. $f(x,y) := \begin{cases} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin x^3y}{\sqrt{x^8+y^6}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esercizio 3. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni

1. $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
3. $f(x,y) := \begin{cases} y^{\frac{4}{3}}\sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) := \sqrt[4]{x^8+y^2}$
5. $f(x,y) := \begin{cases} \frac{\exp^{(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
6. $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Esercizio 4. Sia

$$x_n(k) = \frac{1}{k}\sqrt{2-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)}$$

Provare che

1. $x_n \in \ell^p \ \ \forall p > 1$ e $x_n \notin \ell^1$
2. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\ell^p} x \ \ \forall p > 1$ per un opportuna successione x e che $\|x_n - x\|_p \to 0$