

Università degli Studi Roma Tre a.a 2012/2013

AM 210 - Analisi Matematica 3

Tutorato 3 del 26 Ottobre 2012

Tutori: Andrea Gullotto e Emanuele Padulano

Esercizio 1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &:= \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & 4. f(x, y) &:= \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ 2. f(x, y) &:= \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & 5. f(x, y) &:= \begin{cases} \frac{xy^2 z^2}{x^2+y^4+z^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ 3. f(x, y) &:= \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & 6. f(x, y) &:= \sqrt{|xy|} \end{aligned}$$

Esercizio 2. Siano $f(x, y) := x^2 \log(1 + x^2 y^2)$ e $g(t) := (e^t, t)$. Verificare che $\frac{d}{dt} f(g(t)) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle$

Esercizio 3. Calcolare, $J_{g \circ f}$, dove

$$g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (xy, ze^x) \in \mathbb{R}^2 \quad f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \left(x^2 + y, \frac{y}{x^2 + 1}, x + y\right) \in \mathbb{R}^3$$

verificando la regola della catena.

Esercizio 4. Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità nell'origine della funzione:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^6 + y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 5. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

1. Continua, parzialmente derivabile ma derivabile non in tutte le direzioni.
2. Continua ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni.
3. Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione ma discontinua.
4. Parzialmente derivabile ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.