

DERIVAZIONE

1. Derivabilità e derivata Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$; f si dice derivabile in x_0 se esiste, finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso tale limite si chiama derivata di f in x_0 e si scrive $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $(Df)(x_0)$. Se $f'(x)$ esiste $\forall x \in A$, la $A \ni x \rightarrow f'(x)$ é la '(funzione) derivata' di f in A .

Esempi

Se $f(x) = c \ \forall x$, allora $f'(x) = 0, \forall x$. Infatti, $\frac{f(x)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} \equiv 0$.

Se $f(x) = e^x$, é $f'(x) = e^x$. Infatti $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h-1}{h}\right) \rightarrow_{h \rightarrow 0} e^x$.
Allo stesso modo: $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

Se $f(x) = \log x$, é $f'(x) = \frac{1}{x}$. Infatti $\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} \rightarrow_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, é $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Infatti $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0} \rightarrow_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{x_0^2}$.

Se $f(x) = \sin x$, é $f'(x) = \cos x$. Infatti $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \rightarrow_{h \rightarrow 0} \cos x$

Se $f(x) = \cos x$, é $f'(x) = -\sin x$. Infatti $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin h \sin x - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \rightarrow_{h \rightarrow 0} -\sin x$

(i) La funzione $f(x) = |x|$ non é derivabile in $x = 0$. (ii) Se $f(x) := x^2 \chi_{\mathbf{Q}}(x)$, $f'(0) = 0$ ed $f'(x)$ non esiste se $x \neq 0$ ($\chi_{\mathbf{Q}} \equiv 1$ in \mathbf{Q} , $\chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} \equiv 0$).

NOMENCLATURA Ricordiamo che una funzione $w : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ si dice infinitesima in x_0 , e si scrive $w(x) = o(1)$ in x_0 se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_\epsilon : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |w(x)| \leq \epsilon$, ovvero se w tende a zero al tendere di x a x_0 .

Si dice anche che w é un infinitesimo rispetto ad h (o di ordine superiore al primo) in zero, e si scrive $w = o(h)$, se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(h)}{h} = 0$, ovvero se $w(h) = o(1)h$.

2. Continuitá e differenziabilitá delle funzioni derivabili

Se f è derivabile in x_0 , allora f é differenziabile in x_0 , ovvero

$$R(x) := f(x_0 + h) - [f(x_0) + f'(x_0)h] = o(h)$$

In particolare f è **continua** in x_0 . La funzione lineare di \mathbf{R} in se,

$$df(x_0) : h \rightarrow f'(x_0)h$$

si chiama **differenziale** di f in x_0 . Notiamo che $df(x_0)$ é l'unica funzione lineare che approssima $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo. Infatti

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h \circ (1) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [a + o(1)] = a$$

3. Derivate di somme, prodotti...

(somme e prodotti) Se f, g sono derivabili in x_0 , allora lo sono anche $f + g, fg$, e

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) + g'(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

Esempio. 1. Se $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. Prova: per induzione.

2. Ricordiamo che $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Si ha:

$$(\sinh x)' := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (\cosh x)' = \sinh x.$$

Piú avanti proveremo la formula

(quoziienti) Se f, g sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora lo é anche $\frac{f}{g}$ e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Esempi.

$$D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D \tanh x = D \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

4. Derivata di funzioni composte: la regola della catena

Se g é derivabile in x e f é derivabile in $g(x)$, allora $f \circ g$ é derivabile in x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Prova. Usando prima la differenziabilità di g e poi quella di f , troviamo

$$f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x)h + \epsilon_1(h)) = f(g(x)) + f'(g(x))[g'(x)h + \epsilon_1(h)] + \epsilon_2(k(h))$$

ove $\epsilon_1(h) = o(h)$, $k(h) = g'(x)h + \epsilon_1(h)$, $\epsilon_2(k) = o(k)$. Siccome

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} = g'(x) \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon_2(k(h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon_2(k(h))}{k(h)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} = 0$$

concludiamo che $f(g(x+h)) = f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)h + o(h)$.

$$\text{Esempi.} \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (f^n)' = n f^{n-1} f'$$

$$(e^f)' = f' e^f \quad (\ln f)' = \frac{f'}{f} \quad D \sin(f(x)) = \cos(f(x)) Df(x)$$

Sia $f > 0$. $(f^g)' = (e^{g \log f})' = f^g (g \log f)'$ e quindi, se $g \equiv \alpha$, $(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$

5. Funzione inversa: derivabilità e derivata

Sia f iniettiva in (a, b) , $f^{-1} : f((a, b)) \rightarrow (a, b)$ la funzione inversa. Allora:

- (i) se f é continua in x_0 , f^{-1} é continua in $y_0 = f(x_0)$
- (ii) se f é derivabile in x_0 , con $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} é derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$$e \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Prova

(i) Continuitá: sia $y_n \rightarrow y$, e sia $x_{n_k} := f^{-1}(y_{n_k})$ convergente, diciamo, a x , e quindi $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Da $y_n \rightarrow y$ segue che $f(x) = y$, ovvero $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$.

(ii) Derivabilitá. Per calcolare $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ si puo' utilizzare il cambio di variabile $y = f(x)$: siccome $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$, si ha che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(y_0)}{f(x) - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Equivalentemente, posto $\varphi(x) := \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$, risulta $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \varphi(f^{-1}(y))$ e quindi, per il teorema sui limiti di funzioni composte

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(f^{-1}(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) =$$

Alcune funzioni inverse e le loro derivate

Se $f(x) = x^n, x > 0$, la sua inversa, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}, x > 0$ ha per derivata

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

Piú brevemente, da $x = f(f^{-1}(x))$ e dalla regola della catena, si ottiene

$$e^{\ln x} = x \Rightarrow 1 = e^{\ln x}(\ln x)' = x \ln x \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}(x) = \arctan x \Rightarrow$$

$$1 = D \tan(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2 \Rightarrow D \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}(x) = \arcsin x \Rightarrow$$

$$1 = D \sin(\arcsin x) = \cos(\arcsin x) D \arcsin x = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{Allo stesso modo: } D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$1 = (\sinh(\sinh^{-1} x))' = \cosh(\sinh^{-1} x)(\sinh^{-1} x)' \Rightarrow$$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad \text{Allo stesso modo:}$$

$$1 = (\cosh(\cosh^{-1} x))' = \sinh(\cosh^{-1} x)(\cosh^{-1} x)' = (\cosh^{-1} x)' \sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}$$

$$\Rightarrow (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

6. Derivata a destra, a sinistra

Sia $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}$.

Se esiste il limite, a destra, del rapporto incrementale:

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chiameremo tale limite 'derivata a destra di f in x_0 '. Analogamente si definisce (se esiste) la derivata a sinistra, indicata $f'_-(x_0)$, . Evidentemente **f é derivabile in x_0 se e solo se f ha derivate finite a destra e sinistra e queste sono uguali.**

Esempi.

Se $f(x) = |x|$ $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Se $f(x) = \sqrt{|x|}$ $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$.

7. Funzioni di classe C^1

Sia A aperto (cioé $\forall x \in A \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subset A$). Una f si dice derivabile in A se é derivabile in ogni punto di A . Resta in tal caso definita in A una nuova funzione, la funzione derivata prima, f' . Se poi $f' \in C(A)$, ovvero f' é continua in A , si scrive $f \in C^1(A)$ e si dice che f é di classe C^1 in A .

Una funzione derivabile non é in generale C^1 . Ad esempio

$$f(x) := x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad \text{se } x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

é derivabile con derivata nulla in $x = 0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$ mentre

$$\frac{d}{dx} [x^2 \sin \frac{1}{x}] = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

non ha limite per x tendente a zero.

PROPRIETÁ GLOBALI DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Qui, f é una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Prop. Se $x_o \in (a, b)$ é punto di minimo (o di massimo), cioè

$$\exists \delta > 0 : f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$$

(ovvero $f(x_o) \geq f(x) \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$), allora $f'(x_o) = 0$.

Infatti, $f(x_o + h) - f(x_o) \geq 0$ se $|h| < \delta$, implica

$$f'(x_o) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \leq 0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

Teorema di Rolle Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_o \in (a, b)$ tale che $f'(x_o) = 0$.

Infatti, per il teorema di Weierstrass, $\exists \underline{x}, \bar{x}$, in $[a, b]$ tali che $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$, $\forall x \in [a, b]$. Se $\underline{x}, \bar{x} \in \{a, b\}$, f é costante in $[a, b]$, e quindi la derivata nulla in $[a, b]$. Altrimenti, se, diciamo, $\underline{x} \in (a, b)$, é $f'(\underline{x}) = 0$.

Il teorema del valor medio, o di Lagrange. $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Segue dal Teorema di Rolle applicato a

$$\phi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Il teorema degli accrescimenti finiti, o di Cauchy.

Se g ha le stesse proprietá di f , e, in piú, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, allora

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Segue dal Teorema di Rolle applicato a

$$\phi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$