AM120 2013-2014: APPELLO A

TEMA 1 (Teorema di Darboux). Sia F derivabile in $\mathbf{R}$, $f := F'$ in $\mathbf{R}$. Provare che

(f ha la proprietá del valore intermedio) $\forall x', x'', \quad \forall t \in [0,1] \quad \exists s \in [0,1]:$

$$f(sx' + (1-s)f(x'')) = tf(x') + (1-t)f(x'') \qquad (*)$$

Mostrare con un esempio che la proprietá $(*)$ non é sufficente perché f ammetta primitiva in $\mathbf{R}$, ma che diventa sufficente se f é anche monotona.

TEMA 2. Sia $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni derivabili convergente puntualmente insieme alle sue derivate: $f(x) := \lim_n f_n(x)$, $g(x) := \lim_n f'_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

2.1 Mostrare con un esempio che f non é in generale continua.

2.2 Mostrare come, sotto ulteriori ipotesi, minimali, f risulterá continua.

2.3 Mostrare che se le f'_n sono equicontinue in x_0 allora f é derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \lim_n f'_n(x_0)$.

2.4 Mostrare che se $f_n \in C^2(\mathbf{R})$ allora la convergenza delle successioni f_n ed f'_n é uniforme sugli intervalli limitati e quindi $f \in C^1(\mathbf{R})$ e $f'(x) = \lim_n f'_n(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

TEMA 3. Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nulle fuori di un intervallo $[a, b]$ ed ivi limitate.

3.1 Provare che se f e g sono integrabili allora lo é anche fg. Mostrare con degli esempi che l'integrabilitá di fg non implica l'integrabilitá di f e/o di g.

3.2 Provare che se f é integrabile allora lo sono anche $f^+, f^-, |f|$. Mostrare con degli esempi che l'integrabilitá di f^+, o quella di f^-,o quella di $|f|$ non implicano l'integrabilitá di f.

3.3 Se f, g sono integrabili/assolutamente integrabili in senso improprio su $\mathbf{R}$, é ancora vero che lo sono anche $f^+, f + g$ ed fg? Considerare anche l'eventualitá che f e/o g siano non limitate.

TEMA 4. Scrivere, e dimostrare, la formula di Taylor con il resto in forma integrale, e dedurre la formula di Taylor con il resto secondo Lagrange.

TEMA 5.

Provare, utilizzando il confronto tra integrali e serie, la formula di Stirling.

ESERCIZIO 1.

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

ESERCIZIO 2.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^3 \sin x}$$

ESERCIZIO 3.

Studiare la convergenza in $[0, 1]$ della successione

$$\frac{x}{1 + nx}$$

ESERCIZIO 4.

Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)(x + 2)^{\alpha}} \, dx$$

ESERCIZIO 5.

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{\cos x} \, dx$$