AM120 2013-2014: RECUPERO I ESONERO

TEMA 1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convessa.
1.1 Dare la definizione di convessitá (per f) e le sue caratterizzazioni nelle classi delle funzioni derivabili/derivabili due volte.
1.2 Provare che f é continua.
1.3 Dire perché c'é almeno un punto x_0 in cui f é derivabile e mostrare che $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.
1.4 Dedurre da 1.3 (e 1.2) che per ogni $\epsilon \neq 0$ é vero che

$$(i) \quad \inf_{x\in\mathbf{R}} [f(x) + \epsilon^2 x^2] > -\infty, \qquad (ii) \quad \exists x_\epsilon : \quad \inf_{x\in\mathbf{R}} [f(x) + \epsilon^2 x^2] = f(x_\epsilon) + (\epsilon x_\epsilon)^2$$

mentre (i) e (ii) sono in generale false se $\epsilon = 0$.
Siano ora $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ convesse. Stabilire se é vero che
1.5 (i) $f_1 + f_2$ é convessa (ii) $f_1 f_2$ é convessa
1.6 $F(x) := \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ é convessa,
1.7 $F(x) := \sup_n f_n(x) < +\infty \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad F(x)$ é convessa

TEMA 2.

Sia F derivabile in $\mathbf{R}$, $f := F'$ in $\mathbf{R}$. Provare che

$\forall x', x'', \quad \forall t \in [0, 1] \quad \exists s \in [0, 1] :$

$$f(sx' + (1 - s)f(x'')) = tf(x') + (1 - t)f(x'') \qquad (*)$$

Mostrare con un esempio che la proprietá $(*)$ non é sufficente perché f ammetta primitiva in $\mathbf{R}$ ma che, se f é anche monotona, allora f ha primitiva in $\mathbf{R}$.

TEMA 3.

Sia $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni derivabili convergente puntualmente insieme alle sue derivate: $f(x) := \lim_n f_n(x)$, $g(x) := \lim_n f'_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
3.1 Mostrare con un esempio che f non é in generale continua, e quindi neppure derivabile.
3.2 Mostrare come, sotto ulteriori ipotesi, minimali, f risulterá continua.
3.3 Mostrare che se le f'_n sono equicontinue in x_0 allora f é derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \lim_n f'_n(x_0)$.
3.4 Mostrare che se, di piú, $f_n \in C^2(\mathbf{R})$ allora la convergenza delle successioni f_n e f'_n é uniforme sugli intervalli limitati e quindi $f \in C^1(\mathbf{R})$ e $f'(x) = \lim_n f'_n(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

TEMA 4.

Siano f_n definite in $E \subset \mathbf{R}$ tali che $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ $\forall x \in E$, $n \in \mathbf{N}$.

Provare che

$$\sup_{x \in E} f_n(x) \to_{n \to +\infty} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) \text{ converge uniformemente in } E$$

ESERCIZIO 1

Sia

$$f(x) = \log(x^3 + x^2 + e).$$

Determinare se la funzione $f(x)$ è iniettiva. In caso affermativo determinare il valore della derivata prima della funzione inversa in $(1, \log(2 + e))$.

ESERCIZIO 2

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^3 \sin x}$$

ESERCIZIO 4

Studiare la convergenza in $[0, 1]$ della successione

$$\frac{x}{1 + nx}$$