Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 10 - 9 Maggio 2014

1. - Se f é pari abbiamo che $f(t) = f(-t)$, dunque

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\ dt =_{(*)} -\int_0^x f(-y)\ dy = -\int_0^x f(y)\ dy = -F(x),$$

   cioé $F(x)$ é dispari.
   NB. In $(*)$ abbiamo effettuato la sostituzione $t = -y$. Inoltre l'ultimo integrale é pari a $F(x)$ perché la variabile di integrazione é "muta".

   - Se f é dispari abbiamo che $f(t) = -f(-t)$, dunque

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\ dt =_{(*)} -\int_0^x f(-y)\ dy = \int_0^x f(y)\ dy = F(x),$$

   cioé $F(x)$ é pari.

2. Ricordiamo come applicare la regola di integrazione per sostituzione :
ponendo $f(x) = g(t)$ possiamo cosí sostituire all'interno dell'integrale ogni x con la t. Per fare ció dobbiamo, peró, modificare anche il dx in funzione del dt e gli estremi di integrazione : da $f(x) = g(t)$ otteniamo (derivando il termine sulla sinistra in x ed il termine sulla destra in t) $f'(x)dx = g'(t)dt$.
Gli estremi di integrazione variano, invece, nella seguente maniera : se la x varia tra α e β, sostituendo tali valori in $f(x) = g(t)$ otterremo che la t varierá tra $g^{-1}(f(\alpha))$ e $g^{-1}(f(\beta))$. Se l'integrale é indefinito, una volta completata l'operazione di integrazione bisognerá ritornare nella variabile di integrazione di partenza, cioé riporre $t = g^{-1}(f(x))$.

   Il primo passaggio di ogni integrale di questo esercizio sará l'applicazione della sostituzione indicata:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int dt = t + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c\ ;$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int dt = t + c = \text{settcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + c\ = c\ + \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right);$

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int dt = t + c = \text{settsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + c\ = c\ + \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right);$

   (d) $$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2} &= a^2\int \cosh^2(t)\ dt = \frac{a^2}{2}\int \cosh(2t)+1\ dt = \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right)+c = \frac{a^2}{2}\left(\sinh(t)\cosh(t)+t\right)+\ c\ = \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)\right)+c = \\ &= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)+c\ ;\end{aligned}$$

(e) $\int \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \cos^2(t)\ dt = \dfrac{a^2}{2}\,(t + \sin(t)\cos(t)) + c =$
$= \dfrac{a^2}{2} \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c$;

(f) $\int \sqrt{x^2 - a^2} = a^2 \int \sinh^2(t)\ dt = \dfrac{a^2}{2} \int \cosh(2t) - 1\ dt =$
$= \dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\sinh(2t)}{2} - t\right) + c = \dfrac{a^2}{2}(\sinh(t)\cosh(t) - t) + c =$
$= \dfrac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \dfrac{a^2}{2} \ln\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + c$.

3. Con la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ abbiamo che

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$

Usiamo queste nozioni per svolgere i seguenti esercizi :

(a) $\int \dfrac{3 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}\ dx = \int \dfrac{3 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \dfrac{2\ dt}{1 + t^2} = \int \dfrac{3t^2 + 2t + 3}{t^2 + 1}\ dt =$
$= \int 3 + \dfrac{2t}{t^2 + 1}\ dt = 3t + \ln(t^2 + 1) + c = c\ +\ 3\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) - 2\ln\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$;

(b) $\int \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}\ dx = \int \dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \dfrac{2\ dt}{1 + t^2} = \int \dfrac{2t}{t^4 + 1}\ dt.$
Effettuiamo la sostituzione $t^2 = s$ per ottenere che

$$\int \frac{2t}{t^4 + 1}\ dt = \int \frac{ds}{s^2 + 1} = \arctan(s) + c = \arctan(t^2) + c = \arctan\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c\,;$$

(c) $\int \sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{1 - \sin(x)}}\ dx = \int \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2t}{1+t^2}}} \dfrac{2\ dt}{1 + t^2} = \int \sqrt{\dfrac{2t^2}{t^2 - 2t + 1}} \dfrac{2\ dt}{1 + t^2} =$
$= 2\sqrt{2} \int \dfrac{t\ dt}{(t - 1)(t^2 + 1)}.$
Ora

$$\frac{t}{(t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} \iff \frac{t^2(A + B) + t(-B + C) + A - C}{(t - 1)(t^2 + 1)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A + B = 0 \\ C - B = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\implies 2\sqrt{2} \int \frac{t\ dt}{(t - 1)(t^2 + 1)} = \sqrt{2} \int \frac{1}{t - 1} - \frac{t - 1}{t^2 + 1}\ dt =$$

$$= \sqrt{2}\ln(t-1) - \sqrt{2} \int \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1}\ dt = \sqrt{2}\ln(t-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t^2+1) + \sqrt{2}\arctan(t) + c =$$

$$= \sqrt{2}\ln\left(\frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}\right) + \sqrt{2}\arctan(t) + c = \sqrt{2}\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x}{\sqrt{2}} + c\,;$$

(d) $$\int \frac{dx}{4\sin(x)+3\cos(x)} = \int \frac{\frac{2\ dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -2\int \frac{dt}{3t^2-8t-3} =$$
$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)(3t+1)}.$$
Ora
$$\frac{1}{(t-3)(3t+1)} = \frac{A}{t-3}+\frac{B}{3t+1} = \frac{t(3A+B)+A-3B}{(t-3)(3t+1)} \iff$$
$$\iff \begin{cases} 3A+B=0 \\ A-3B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{10} \\ B=-\frac{3}{10} \end{cases}$$
$$\implies -2\int \frac{dt}{(t-3)(3t+1)} = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{t-3}-\frac{3}{3t+1}\ dt =$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\ln(t-3)-\ln(3t+1)\right)+c = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{3t+1}{t-3}\right)+c = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{3\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right)+c\,.$$

4. (a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ dx$: Effettuiamo la sostituzione $e^x=t$ ottenendo che
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ dx = \int \frac{dt}{t^2-3t+2} = \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)}.$$
Ora
$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2} = \frac{t(A+B)-2A-B}{(t-1)(t-2)} \iff$$
$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$
$$\implies \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int \frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1} = \ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right)+c = \ln\left(\frac{e^x-2}{e^x-1}\right)+\ c\ ;$$

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{(1+\tan(x))^2}\ dx$: Effettuiamo la sostituzione $t=\tan(x)$
ottenendo che
$$\int \frac{2}{(1+\tan(x))^2}\ dx = 2\int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{(1+t)^2} = 2\int \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)^2}.$$
Ora
$$\frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{(t+1)^2} =$$
$$= \frac{t^3(A+C)+t^2(2A+B+D)+t(A+2B+C)+B+D}{(t^2+1)(t+1)^2}$$
$$\iff \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ A+2B+C=0 \\ B+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{1}{2} \\ D=1 \end{cases} \quad \text{quindi}$$
$$2\int \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)^2} = \int \frac{t+2}{t^2+2t+1}-\frac{t}{t^2+1}\ dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+1}+\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{2t}{t^2+1}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2+1}\right) - \frac{1}{t-1} + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\tan(x)+1)^2}{\tan^2(x)+1}\right) - \frac{1}{\tan(x)-1} + c =$$

$$= \ln(\sin(x)+\cos(x)) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} + c \ ;$$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}$: Effettuiamo la sostituzione $2x = t^6$ ottenendo che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)} = 3\int \frac{t^2}{t^2+1}\ dt = 3\int 1 - \frac{1}{t^2+1}\ dt =$$

$$= 3t - 3\arctan(t) + c = 3\sqrt[6]{2x} - 3\arctan\left(\sqrt[6]{2x}\right) + c \ ;$$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ dx$: Effettuiamo la sostituzione $x-1 = t^2$ ottenendo che

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ dx = 2\int \frac{t^3+t^2+t}{t^2-4}\ dt = 2\int t+1+\frac{5t+4}{t^2-4}\ dt.$$

Ora

$$\frac{5t+4}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{t(A+B)+2A-2B}{(t-2)(t+2)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+B=5 \\ 2A-2B=4 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{7}{2} \\ B=\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \text{quindi}$$

$$2\int t+1+\frac{5t+4}{t^2-4}\ dt = t^2+2t+\int \frac{7}{t-2} + \frac{3}{t+2}\ dt = t^2+2t+7\ln(t-2)+3\ln(t+2)+c =$$

$$= x-1+2\sqrt{x-1}+7\ln\left(\sqrt{x-1}-2\right)+3\ln\left(\sqrt{x-1}+2\right)+\ c \ ;$$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\ dx$: Effettuiamo la sostituzione $x = \sinh^2(t)$ cosí da ottenere

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\ dx = 2\int \sinh^2(t)\ dt = \int \cosh(2t)-1\ dt = \frac{\sinh(2t)}{2} - \ t \ + \ c \ =$$

$$= \sinh(t)\cosh(t) - \ t \ + \ c \ = \ \sqrt{x}\cosh\left(\text{settsinh}(\sqrt{x})\right) - \ \text{settsinh}(\sqrt{x}) \ + \ c \ =$$

$$= \sqrt{x}\sqrt{x+1} \ - \ \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) \ + \ c \ = \sqrt{x^2+x} \ - \ \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) \ + \ c \ ;$$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+13}\ dx = \int \sqrt{(x+2)^2+9}\ dx = 3\int \sqrt{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\ dx.$

Effettuiamo la sostituzione $\frac{x+2}{3} = \sinh(t)$ ottenendo che

$$3\int \sqrt{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\ dx = 9\int \cosh^2(t)\ dt = \frac{9}{2}\int \cosh(2t)+1\ dt =$$

$$= \frac{9}{4}\sinh(2t) \ + \ \frac{9}{2}t \ + \ c \ = \frac{9}{2}(\sinh(t)\cosh(t)+t) \ + \ c \ =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\left(\frac{x+2}{3}\right)\frac{\sqrt{x^2+4x+13}}{3} + \ln\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+13}}{3}\right)\right) \ + \ c \ =$$

$$= \frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+13}}{2} + \frac{9}{2}\ln\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+13}}{3}\right) \ + \ c.$$

5. (a) $\int_0^{2\pi} \max\{\sin(x), \cos(x)\}\ dx$: Come possiamo notare nella Figura 1, $\cos(x) > \sin(x)$ fino a che i grafici non si intersecano: come sappiamo bene, tale intersezione é il punto $x = \frac{\pi}{4}$ ove entrambe le funzioni assumono il valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Successivamente $\sin(x) > \cos(x)$ fino al punto di intersezione successivo, che altro non é se non $x = \frac{5}{4}\pi$, ove entrambe le funzioni assumono il valore $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dopo tale punto torna ad essere $\cos(x) > \sin(x)$ fino alla fine (ed oltre) dell'intervallo considerato. Dunque

$$\int_0^{2\pi} \max\{\sin(x), \cos(x)\}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin(x)\ dx + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi} \cos(x)\ dx =$$

$$= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} + [\sin(x)]_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ ;$$

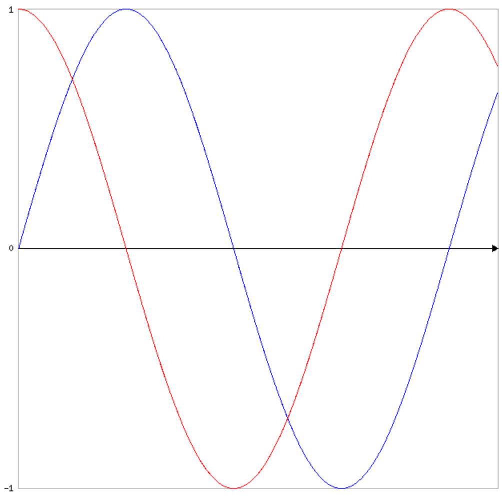

Figura 1: Grafico delle funzioni $\sin(x)$ (Blu) e $\cos(x)$ (Rosso).

(b) $\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\ dx$: Effettuiamo una sostituzione che ci permetta di non avere piú radici di alcun tipo, cioé $x = t^{\text{mcm}(3,4,6)} = t^{12}$. Cosí facendo otteniamo che

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\ dx = \int_0^1 \frac{t^2 - 1}{t^4 + t^3}\ 12t^{11}\ dt = 12 \int_0^1 t^9 - t^8\ dt = 12\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{9}\right) = -\frac{2}{15}\ ;$$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)}$: La sostituzione da effettuare in questo caso é $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, cosí da ottenere che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)} = \int_0^1 \frac{\frac{2\ dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1}} = -2\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2\int_0^1 \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}$$

Ora

$$\frac{1}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} = \frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}} = \frac{t(A+B) + A(\sqrt{2}-1) - B(1+\sqrt{2})}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ A(\sqrt{2}-1)-B(\sqrt{2}+1)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$-2\int_0^1 \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1}{t-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1-\sqrt{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ ;$$

(d) $\int_0^1 \sqrt{\sqrt[6]{x}+1}\,dx$: Effettuiamo la sostituzione $x=(t^2-1)^6$ in maniera da avere che $\sqrt{\sqrt[6]{x}+1}=t$. Con tale sostituzione abbiamo che

$$\int_0^1 \sqrt{\sqrt[6]{x}+1}\,dx = 12\int_1^{\sqrt{2}} t^2(t^2-1)^5\,dt = 12\int_1^{\sqrt{2}} t^{12}-5t^{10}+10t^8-10t^6+5t^4-t^2\,dt =$$

$$= 12\left[\frac{t^{13}}{13}-\frac{5}{11}t^{11}+\frac{10}{9}t^9-\frac{10}{7}t^7+t^5-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 12\left(\frac{64\sqrt{2}-1}{13}-\frac{5(32\sqrt{2}-1)}{11}+\frac{10(16\sqrt{2}-1)}{9}-\frac{10(8\sqrt{2}-1)}{7}+4\sqrt{2}-1-\frac{(2\sqrt{2}-1)}{3}\right) =$$

$$= 12\left(\sqrt{2}\left(\frac{64}{13}-\frac{160}{11}+\frac{160}{9}-\frac{80}{7}+4-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{13}+\frac{5}{11}-\frac{10}{9}+\frac{10}{7}-1+\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= 12\left(\sqrt{2}\left(\frac{542}{9009}\right)+\frac{256}{9009}\right) = \frac{8(271\sqrt{2}+128)}{3003}\ ;$$

(e) $\int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx = \int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}}\,dx.$

Effettuiamo la sostituzione $\frac{x+1}{3}=\sinh(t)$ ottenendo che

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}}\,dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 3\sinh(t)+2\,dt = [3\cosh(t)+2t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= 3\cosh(\ln(1+\sqrt{2}))-3+2\ln(1+\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}-1)+2\ln(1+\sqrt{2})\ ;$$

(f) Per calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2(x)+1}$$

dobbiamo inanzitutto osservare (vedere Figura 2) che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2(x)+1} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2(x)+1}.$$

Per vedere questo basta pensare che la funzione integranda é sempre positiva, che assume il suo minimo, 1, in $0, \pi, 2\pi$ e che assume il suo massimo,2, in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ (se non si crede a questo basta studiare la funzione).

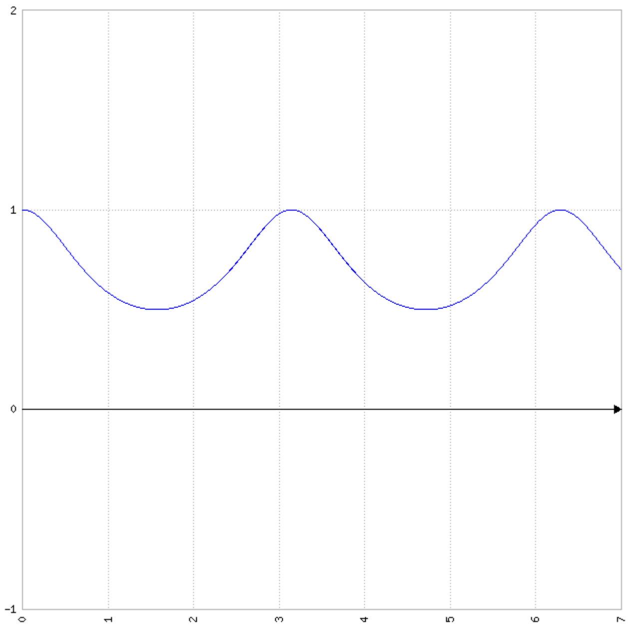

Figura 2: Grafico della funzione $\frac{1}{1+\sin^2(x)}$.

Applichiamo ora all'integrale la sostituzione $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ per ottenere che

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2(x)+1} = 4\int_0^1 \frac{1}{\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}+1}\frac{2\ dt}{t^2+1} = 8\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1}dt$$

Osserviamo che

$$t^4+6t^2+1 = (t^2+3+2\sqrt{2})(t^2+3-2\sqrt{2})$$

e cerchiamo A, B, C e D tali che

$$\frac{At+B}{t^2+3+2\sqrt{2}} + \frac{Ct+D}{t^2+3-2\sqrt{2}} = \frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1}.$$

Abbiamo che

$$\frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1} = \frac{At+B}{t^2+3+2\sqrt{2}} + \frac{Ct+D}{t^2+3-2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+[(3-2\sqrt{2})A+(3+2\sqrt{2})C]t+(3-2\sqrt{2})B+(3+2\sqrt{2})D}{t^4+6t^2+1}$$

$$\iff \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=1 \\ (3-2\sqrt{2})A+(3+2\sqrt{2})C=0 \\ (3-2\sqrt{2})B+(3+2\sqrt{2})D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \\ C=0 \\ D=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\implies \frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{t^2+3+2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{t^2+3-2\sqrt{2}}$$

$$\implies 8\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+6t^2+1}dt = 8\left[\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3+2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3-2\sqrt{2}}\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[(\sqrt{2}+1)\int_0^1 \frac{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^2+1}dt + (\sqrt{2}-1)\int_0^1 \frac{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)^2+1}dt\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^2+1}dt + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)^2+1}dt\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right) + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)\right]_0^1 =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right) + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)\right]$$

Ma, tramite la formula del doppio radicale, abbiamo che

$$\begin{cases} \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \end{cases}$$

pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2(x)+1} = 2\sqrt{2}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right) + \arctan\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\right] = \sqrt{2}\pi$$

essendo

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall\ x > 0.$$