

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 11 - 15 Maggio 2014

1. Ricordiamo come applicare la regola di integrazione per sostituzione :

ponendo $f(x) = g(t)$ possiamo così sostituire all'interno dell'integrale ogni x con la t . Per fare ciò dobbiamo, però, modificare anche il dx in funzione del dt e gli estremi di integrazione : da $f(x) = g(t)$ otteniamo (derivando il termine sulla sinistra in x ed il termine sulla destra in t) $f'(x)dx = g'(t)dt$.

Gli estremi di integrazione variano, invece, nella seguente maniera : se la x varia tra α e β , sostituendo tali valori in $f(x) = g(t)$ otterremo che la t varierà tra $g^{-1}(f(\alpha))$ e $g^{-1}(f(\beta))$. Detto ciò possiamo affrontare i seguenti integrali :

- (a) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}} dx$: Effettuiamo il cambio di variabile $x^2 = t$ così da ottenere

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}} dx = \frac{1}{2} \int_4^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^3}} = - \left[\frac{1}{\sqrt{t-3}} \right]_4^{+\infty} = 1.$$

- (b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}} + 2xe^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}} dx + 2 \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$. I due integrali devono essere svolti con due procedure differenti: nel primo effettuiamo la sostituzione $x^4 + 8 = t$, nel secondo applichiamo la regola di integrazione per parti con $f(x) = x$ e $g(x) = e^{-x}$. Così facendo otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}} + 2xe^{-x} dx &= \frac{1}{4} \int_8^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^5}} + 2 \left\{ [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right\} = \\ &= -\frac{3}{8} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right]_8^{+\infty} - 2 [e^{-x}]_0^{+\infty} = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{64}} + 2 = \frac{3}{32} + 2 = \frac{67}{32}. \end{aligned}$$

- (c) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$: Effettuiamo la sostituzione $\frac{1}{x} = t$ ed otteniamo

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

- (d) $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x(2x+1)}}$: In questo caso la sostituzione da effettuare è $2x = t^2$; applicandola otteniamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x(2x+1)}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan(t)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

- (e) $\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2} dx$: Dobbiamo applicare il metodo di integrazione delle funzioni razionali. Essendo

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$$

abbiamo che

$$\frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \iff \frac{x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C}{(x+2)(x^2+1)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=9 \\ A+2C=8 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=5 \end{cases}$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2} dx = -2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+2} + \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx + 5 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \left[-2 \ln(x+2) + \ln(x^2+1) + 5 \arctan(x) \right]_0^{+\infty} = \left[\ln \left(\frac{x^2+1}{x^2+4x+4} \right) + 5 \arctan(x) \right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\ln \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{5}{2} \pi = 2 \ln(2) + \frac{5}{2} \pi.$$

(f) Poniamo

$$I_n := \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Effettuiamo un'integrazione per parti con $f(x) = x^n$ e $g(x) = e^{-x}$ ottenendo

$$I_n = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1}.$$

Iterando otteniamo dunque che

$$I_n = n I_{n-1} = n(n-1) I_{n-2} = \dots = n! I_0.$$

Essendo

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

Abbiamo che $I_n = n!$.

2. Per svolgere questa tipologia di esercizio sfrutteremo qualche concetto visto durante il corso :

$$\bullet \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1 \qquad \bullet \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies f(x) \approx g(x) \text{ intorno ad } x_0.$$

In particolare, per la definizione di limite, abbiamo che

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies$ esiste $\epsilon > 0 : |f(x)| < \epsilon |g(x)|$ vicino ad x_0 .
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \implies$ esiste $M > 0 : |f(x)| > M |g(x)|$ vicino ad x_0 .

Con tali accortezze possiamo addentrarci nella risoluzione degli esercizi dati :

$$(a) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx = I_1 + I_2.$$

L'integranda é limitata in $[0, 1]$, indi sicuramente I_1 converge.

Vediamo se si può dir lo stesso di I_2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

quindi $e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$ definitivamente. Pertanto

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty .$$

Dunque $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

$$(b) \int_0^{+\infty} \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{+\infty} \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dunque $\int_0^1 \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty .$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

pertanto $\int_1^{+\infty} \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx > \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$, quindi

$$\int_0^{+\infty} \log(x) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = +\infty .$$

$$(c) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \implies \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx < +\infty .$$

Poiché, invece,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \implies \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

abbiamo che $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = +\infty .$

- (d) $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$: Per quanto visto nell'esercizio precedente abbiamo che questo integrale converge. Difatti vicino a 0 il comportamento é lo stesso, mentre per $x \rightarrow +\infty$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \approx \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty .$$

- (e) $\int_{-1}^1 \tan(x) \log(x^2) dx$: Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) \log(x^2)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \tan(x) \log(x^2) = 0$$

abbiamo che l'integrale converge. Inoltre, essendo l'integranda dispari, possiamo concludere che $\int_{-1}^1 \tan(x) \log(x^2) dx = 0$.

- (f) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx = I_1 + I_2$.
Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

abbiamo che $I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} < +\infty$.

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin(x)}{x^2+1}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2+1} = 0$$

dunque $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < +\infty \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx < +\infty$.

- (g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)} dx$: Limitiamoci a studiare $\int_0^{\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)} dx$ per cominciare, dividendo esso in I_1 ed I_2 come al solito.

Essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2xe^x} = 1$ abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}e^x}{(x^4+1)} = 0 \implies I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty .$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^x}{(x^4+1)\sinh(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4+1} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} = 0$$

quindi $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$.

Passiamo ora a studiare

$$\int_{-\infty}^0 \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)} dx + \int_{-1}^0 \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)} dx = I_3 + I_4.$$

I_3 converge per la stessa stima di I_2 .

Vediamo quindi di studiare I_4 per concludere. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}e^x}{x^4+1} = 1$$

abbiamo che $I_4 \approx \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{-1}^0 = 2(\sqrt{2}-1) < +\infty$.

Mettendo tutto assieme otteniamo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)} dx < +\infty$.

(h) $\int_0^1 \frac{(x^x-1)\cos(x)}{\sin(x)} dx$: Essendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^x-1)\cot(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}(x^x-1)\cot(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{2}} \ln(x)\cot(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) \cos(x) = 0 \end{aligned}$$

(abbiamo utilizzato il fatto che $(x^x-1) = (e^{x \ln(x)}-1) \approx x \ln(x)$)

essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ed il fatto che $\sin(x) \approx x$ essendo

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$) abbiamo che

$$\int_0^1 \frac{(x^x-1)\cos(x)}{\sin(x)} dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty.$$

(i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-4)}$: Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{|x|(x-4)}}}{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4}$$

abbiamo che $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-4)} \approx \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$.

(j) $\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)} dx$: essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

abbiamo che $\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)} \approx \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, dunque

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)} dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty.$$

(k) $\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2} dx$: Effettuiamo la sostituzione $x = t^2$ ottenendo

$$\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2} dx = -2 \int_2^{\sqrt{5}} \frac{3t^3-t}{t-2} dt = -2 \int_2^{\sqrt{5}} 3t^2 + 6t + 11 + \frac{22}{t-2} dt.$$

Perché l'integrale converga dobbiamo vedere se converge $\int_2^{\sqrt{5}} \frac{dt}{t-2}$.

Se chiamiamo $t-2 = y$ otteniamo $\int_0^{\sqrt{5}-2} \frac{dy}{y} = +\infty$.

(l) $\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$: Effettuiamo la sostituzione $x-1 = t$ ottenendo che

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(t+1)}{\sqrt[3]{t^2}} dt.$$

Essendo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t+1)}{\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(t+1) = \cos(1)$$

abbiamo che $\int_0^1 \frac{\cos(t+1)}{\sqrt[3]{t^2}} dt \approx \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} dt < +\infty$.

Pertanto (ovviamente su $(-1, 0)$ vale la stessa stima) abbiamo che

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx < +\infty.$$

(m) $\int_0^1 \frac{dx}{x \sin(x)}$: Ovviamente vicino a 0 sappiamo che $\sin(x) \approx x$, dunque

$$\int_0^1 \frac{dx}{x \sin(x)} \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty.$$

(n) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}$: Effettuiamo la sostituzione $x-1 = t$ ed abbiamo che

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)(t^2+2t+2)}}.$$

Essendo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{t(t+2)(t^2+2t+2)}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(t+2)(t^2+2t+2)}} = \frac{1}{2}$$

abbiamo che $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)(t^2+2t+2)}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} < +\infty$.

3. (a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}} dx = I_1 + I_2$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\alpha^2}{4x}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

abbiamo che $I_1 < +\infty \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (essendo $I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ per $\alpha \neq 0$ e $I_1 \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ per $\alpha = 0$). Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e quindi $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}} dx < +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$(b) \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx.$$

Essendo $1 - e^{-x} \approx x$ per x vicino a 0, abbiamo che

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} < +\infty \iff \alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2.$$

Consideriamo $\beta > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\beta-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \beta > \alpha \\ 1 & \beta = \alpha \\ 0 & \beta < \alpha \end{cases}.$$

Dunque $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx < +\infty$ se e solo se $\alpha \geq \beta > 1$.

Pertanto $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha \in (1, 2)$.

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-\alpha x}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x} dx = I_1 + I_2.$$

Notiamo subito che se $\alpha = 0$ l'integrale diventa $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = +\infty$.

Escludiamo dunque il caso $\alpha = 0$. Vediamo cosa succede a seconda che α sia positivo o negativo:

- Sia $\alpha > 0$: abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{-\alpha x}}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}e^{-\alpha x}}{x+1} = 0 \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-\alpha x}}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{x+1} = 0.$$

Dunque $I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$ e $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$ per $\alpha > 0$;

- Sia $\alpha < 0$: Poniamo $\beta = -\alpha > 0$ e notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{\beta x}}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}e^{\beta x}}{x+1} = +\infty$$

e quindi $I_2 > \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$ per $\alpha < 0$.

Perciò $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x} dx < +\infty \iff \alpha > 0$.

- (d) $\int_0^\pi \log(1 + \alpha \cos(x)) dx$: inanzitutto vogliamo che la funzione sia definita in \mathbb{R} , dunque dovrà essere $1 + \alpha \cos(x) > 0$. Essendo $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ abbiamo che $1 - \alpha \leq 1 + \alpha \cos(x) \leq 1 + \alpha$ e quindi, perché sia positivo, avremo che

$-1 < \alpha < 1$. Per $\alpha \in (-1, 1)$ non abbiamo, ovviamente, problemi. Vediamo che succede per $\alpha = \pm 1$.

Consideriamo

$$\int_0^\pi \log(1 + \alpha \cos(x)) dx = \int_0^1 \log(1 + \alpha \cos(x)) dx + \int_1^\pi \log(1 + \alpha \cos(x)) dx = I_1 + I_2.$$

- Sia $\alpha = -1$: Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \cos(x))}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \log(1 - \cos(x)) = 0 \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log(1 - \cos(x))}{\frac{1}{\sqrt{\pi-x}}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\pi-x} \log(1 - \cos(x)) = 0$$

$$\text{abbiamo che } I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty \quad e \quad I_2 < \int_1^\pi \frac{dx}{\sqrt{\pi-x}} < +\infty ;$$

- Sia $\alpha = 1$: Valgono esattamente gli stessi limiti e dunque le stesse stime del caso $\alpha = -1$.

Dunque $\int_0^\pi \log(1 + \alpha \cos(x)) dx < +\infty \iff \alpha \in [-1, 1]$.

- (e) $\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} dx$: Il problema é, evidentemente, in $x = 2$ (in quanto si annulla il denominatore).

Essendo $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} dx &\approx \int_2^3 \frac{x(x-2)^\alpha}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}} dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \approx \\ &\approx \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{\sqrt{x+2}(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}}{\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sqrt{x+2}} = 1. \end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione $x - 2 = t$ otteniamo che

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-\alpha}} < +\infty \iff \frac{1}{2} - \alpha < 1 \iff \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Dunque $\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} dx < +\infty \iff \alpha > -\frac{1}{2}$.

- (f) $\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}$: I problemi vi sono per $\alpha = 2$ ed $\alpha = 3$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x-2)\sqrt{x-3}} = 1$$

si ha che $\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \approx \int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < +\infty \quad \forall \alpha > 3$.

Sia $\alpha = 3$: Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}}{\frac{1}{\sqrt{x-3}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

si ha che (per $M \gg 3$, $M < +\infty$)

$$\int_3^M \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \approx \int_3^M \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \left[2\sqrt{x-3}\right]_3^M = 2\sqrt{M-3} < +\infty.$$

Dunque $\alpha = 3$ va bene.

Consideriamo ora $\alpha = 2$: Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{(x-2)\sqrt{3-x}}}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{3-x}} = 1$$

abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \approx \gamma + \int_2^3 \frac{dx}{x-2}, \quad \text{con } \gamma = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{3-x}} < +\infty.$$

Ma $\int_2^3 \frac{dx}{x-2} = [\log(x-2)]_2^3 = +\infty$, indi $\alpha = 2$ non va bene.

Non essendoci discontinuit  di $f(x)$ per $2 < \alpha < 3$, abbiamo che

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} < +\infty \iff \alpha > 2.$$

4. (a) Come possiamo vedere nella Figura 1, per $x \in [0, 1]$ il grafico di $g(x)$   sopra a quello di $f(x)$, mentre successivamente (quindi per $x \in [1, \frac{7}{4}]$) il grafico di $f(x)$   sopra a quello di $g(x)$. Dunque l'area compresa tra le due funzioni e la retta $x = \frac{7}{4}$   data da

$$\int_1^{\frac{7}{4}} (f(x) - g(x)) dx = \int_1^{\frac{7}{4}} x^2 - \sqrt{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{7}{4}} = \frac{407 - 112\sqrt{7}}{192}.$$

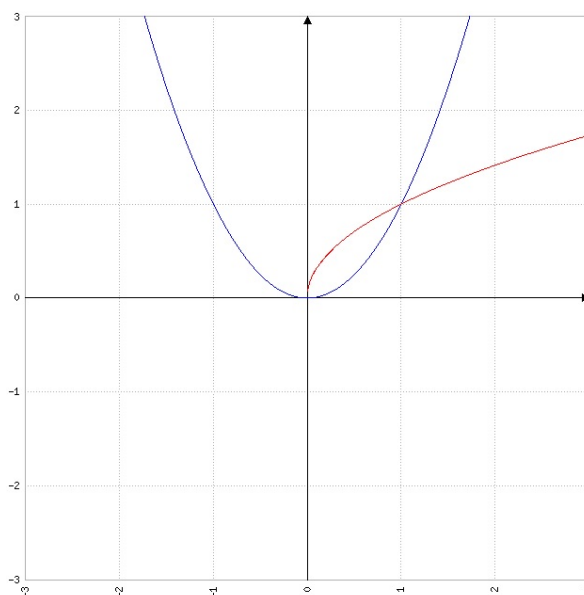


Figura 1: Grafico delle funzioni x^2 (Blu) e \sqrt{x} (Rosso)

- (b) Notiamo inanzitutto che $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ e $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.
 Come possiamo vedere in Figura 2, le due parabole si incontrano nel punto $(0, 4)$.
 Inoltre esse incontrano l'asse x rispettivamente nei punti $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.
 Dunque, l'area compresa tra esse e l'asse x é data da

$$\int_{-2}^0 (x + 2)^2 dx + \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \left[\frac{(x + 2)^3}{3} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

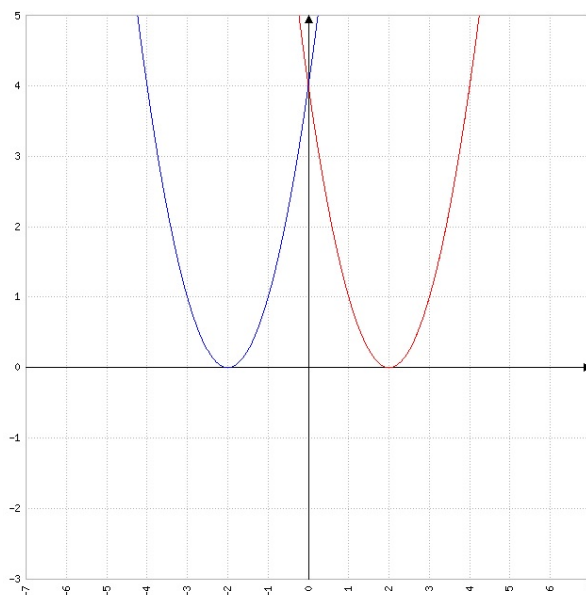


Figura 2: Grafico delle parabole $(x + 2)^2$ (Blu) e $(x - 2)^2$ (Rosso)

- (c) Come é evidente dalla Figura 3, l'area che ci interessa é la fetta di semicirconfenza compresa tra le due rette $y = 3x$ ed $y = -3x$. Per capire gli estremi di integrazione dobbiamo vedere quali sono i punti di intersezione tra la semicirconfenza e le due rette. Per fare questo basta trovare la soluzione dei sistemi tra tali funzioni :

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y = 3x \end{cases} \iff 3x = \sqrt{1 - x^2} \iff x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y = -3x \end{cases} \iff -3x = \sqrt{1 - x^2} \iff x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Dunque l'area che ci interessa é data da

$$\begin{aligned} A &:= \int_{-\frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \sqrt{1 - x^2} + 3x dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \sqrt{1 - x^2} - 3x dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{10}}}^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{3}{2} [x^2]_{-\frac{1}{\sqrt{10}}}^0 - \frac{3}{2} [x^2]_0^{\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\frac{3}{10} + 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione $x = \sin(y)$ otteniamo che

$$A = -\frac{3}{10} + 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{3}{10} + 2 \int_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)} \cos^2(y) dy =$$

$$= -\frac{3}{10} + [x + \sin(x) \cos(x)]_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)} = -\frac{3}{10} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \gamma.$$

Giacché

$$\gamma = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

ed essendo

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{abbiamo che } \gamma = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{3}{10}.$$

Dunque

$$A = -\frac{3}{10} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{3}{10} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

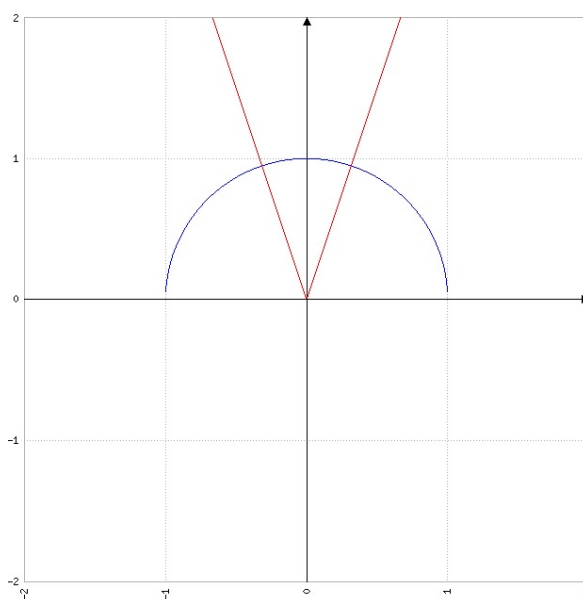


Figura 3: Grafico della funzione $y = 3|x|$ e della semicirconferenza unitaria ($y = \sqrt{1-x^2}$)