

# Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 12 - 20 Maggio 2014

1. Per scambiare limite ed integrale ci serve che la funzione  $f_n(x)$  sia equidominata da una certa funzione  $g(x)$  (non dipendente da  $n$ ) su  $(a, b)$ , cioè vogliamo che esista  $g(x)$ :  $|f_n(x)| \leq |g(x)| \forall x \in (a, b)$  e tale che  $\int_a^b g(x) dx < \infty$ . Inoltre chiediamo anche la convergenza uniforme delle  $f_n(x)$  sull'intervallo considerato.

(a) Abbiamo che

$$\frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La successione é equidominata su tutto  $(0, +\infty)$  perché

$$\frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} \leq x e^{-nx^2} \leq x e^{-x^2}$$

e

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left[ -\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Inoltre la convergenza é uniforme su tutti i compatti contenuti in  $(0, +\infty)$  poiché

$$\sup_{x \in [\delta, M]} \left| \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} \right| \leq \sup_{x \in [\delta, M]} |x e^{-nx^2}| \leq M e^{-n\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Quindi si può applicare il passaggio al limite sotto segno di integrale improprio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx} \right) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0.$$

(b) Abbiamo che

$$\frac{\sin(nx)}{n+x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La convergenza é uniforme in tutto l'intervallo  $[0, +\infty)$  perché

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{\sin(nx)}{n+x} \right| \leq \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{1}{n+x} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La successione non é, però, equidominata, quindi non é consentito scambiare i segni di limite ed integrale. Tuttavia, integrando per parti con  $f'(x) = \sin(nx)$  e  $g(x) = \frac{1}{n+x}$ , si trova che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left[ -\frac{\cos(nx)}{n(n+x)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2} dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2} dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{-\cos(nx)}{n(n+x)^2} dx. \end{aligned}$$

La funzione  $-\frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2}$  tende uniformemente a 0  $\forall x \in [0, +\infty)$ , perché

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2} \right| \leq \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{1}{n(n+x)^2} \right| \leq \frac{1}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Inoltre é equidominata in quanto

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2} \right| \leq \left| \frac{1}{n(n+x)^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Si può dunque passare al limite sotto segno di integrale e si trova che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{-\cos(nx)}{n(n+x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-\cos(nx)}{n(n+x)^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0.$$

2. (a)  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Tuttavia non vi é convergenza uniforme su tutto  $\mathbb{R}$ , difatti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_n(x) - f(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_n(x) - f(x)) = -\infty$$

mentre  $D[f_n(x) - f(x)] = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 > 0$  mai! Quindi  $f_n(x) - f(x)$  é decrescente e

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Tuttavia vi é convergenza su ogni intervallo compatto, difatti,  
 $\forall M > 0$ ,

$$\sup_{x \in [-M, M]} \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right| = -n \sin\left(\frac{M}{n}\right) + M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dunque é possibile scambiare limite ed integrale in  $[0, 13]$ .

- (b)  $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Vogliamo calcolare  $\sup_{x \in [0, \infty)} |g_n(x)|$ .

Notiamo che  $g_n(x) > 0$  se  $x \neq 0$ . Inoltre  $g_n(0) = 0$  e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0 \implies g_n(x)$  ha un massimo in  $[0, +\infty)$ . Calcoliamolo con la derivata di  $g_n(x)$ :

$$g'_n(x) = \frac{n(n^2 - x^2)}{(n^2 + x^2)^2} \geq 0 \iff n^2 - x^2 \geq 0 \iff -n \leq x \leq n.$$

Dunque il massimo di  $g_n(x)$  é in  $x = n$ . Perció

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |g_n(x)| = |g_n(n)| = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Non vi é, dunque, convergenza uniforme su  $[0, +\infty)$  e non é possibile scambiare limite ed integrale.

(c)  $h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Abbiamo che

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-nx}}{n^2 + x^2} \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dunque la convergenza é uniforme su  $[0, 1]$  ed é possibile scambiare limite ed integrale.

3. Effettuiamo il cambio di variabile  $nx = y$  per togliere la dipendenza da  $n$  dagli estremi di integrazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{ne^x \arctan(nx)}{n^2x^2 + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{y}{n}} \arctan(y)}{y^2 + 1} dy.$$

Ora: l'intervallo di convergenza é limitato e l'integranda converge uniformemente a  $\frac{\arctan(y)}{y^2+1}$ . Difatti

$$\sup_{y \in [0,1]} \left| \frac{e^{\frac{y}{n}} \arctan(y)}{y^2 + 1} - \frac{\arctan(y)}{y^2 + 1} \right| = \sup_{y \in [0,1]} \frac{|e^{\frac{y}{n}} - 1| \arctan(y)}{y^2 + 1} \leq \frac{\pi}{4} \sup_{y \in [0,1]} |e^{\frac{y}{n}} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dunque possiamo scambiare limite ed integrale:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{y}{n}} \arctan(y)}{y^2 + 1} dy &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\frac{y}{n}} \arctan(y)}{y^2 + 1} \right) dy = \int_0^1 \frac{\arctan(y)}{y^2 + 1} dy = \\ &= \left[ \frac{\arctan^2(y)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

4. (a)  $I := \int_1^2 \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx$  : Notiamo inanzitutto che

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[ \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right] = \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right].$$

Dunque

$$\int_1^2 \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right)^2}{x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx.$$

Effettuiamo, ora, la sostituzione  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \sinh(t)$ , ottenendo:

$$\int_1^2 \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right)^2}{x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(t)\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3} \sinh(t) - 1}{2}\right)^2} dt$$

con

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{settsinh}(\sqrt{3}) = \ln(\sqrt{3} + 2) \\ \beta = \operatorname{settsinh}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}.$$

Ora:

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh(t)\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3} \sinh(t) - 1}{2}\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(2 - \sqrt{3} \cosh(t))^2}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{4 + 3 \cosh^2(t) - 4\sqrt{3} \cosh(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = \\
& = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{7 + 3 \sinh^2(t) - 4\sqrt{3} \cosh(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{7 + 3 \sinh^2(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt - 4 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{3} \cosh(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = \\
& = \left[ \frac{4}{\sqrt{3} \sinh(t) - 1} \right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{7 + 3 \sinh^2(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = 4 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{7 + 3 \sinh^2(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = \\
& = -1 + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{7 + 3 \sinh^2(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt = -1 + \int_{\alpha}^{\beta} \left( 1 + \frac{6 + 2\sqrt{3} \sinh(t)}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} \right) dt = \\
& = -1 + (\beta - \alpha) + 2\sqrt{3} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sinh(t) + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt := \gamma + 2\sqrt{3}\lambda
\end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} \gamma = -1 + (\beta - \alpha) = -1 + \ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{3+2\sqrt{3}}\right) \\ \lambda = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sinh(t) + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} \sinh(t) - 1)^2} dt \end{cases}$$

Calcoliamo  $\lambda$  per concludere l'esercizio:

$$\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\frac{e^t - e^{-t} + 2\sqrt{3}}{2}}{\frac{(\sqrt{3}e^t - \sqrt{3}e^{-t} - 2)^2}{4}} dt = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\frac{e^{2t} + 2\sqrt{3}e^t - 1}{e^t}}{\frac{(\sqrt{3}e^{2t} - 2e^t - \sqrt{3})^2}{e^{2t}}} dt = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{2t} + 2\sqrt{3}e^t - 1}{(\sqrt{3}e^{2t} - 2e^t - \sqrt{3})^2} e^t dt.$$

Effettuiamo il cambio di variabili  $e^t = y$  ottenendo

$$\lambda = 2 \int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{y^2 + 2\sqrt{3}y - 1}{(\sqrt{3}y^2 - 2y - \sqrt{3})^2} dy = 6 \int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{y^2 + 2\sqrt{3}y - 1}{(3y + \sqrt{3})^2(y - \sqrt{3})^2} dy.$$

Spezziamo ora l'integranda nella seguente maniera:

$$\begin{aligned}
& \frac{y^2 + 2\sqrt{3}y - 1}{(3y + \sqrt{3})^2(y - \sqrt{3})^2} = \frac{Ay + B}{(3y + \sqrt{3})^2} + \frac{Cy + D}{(y - \sqrt{3})^2} \iff \\
& \iff y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = (Ay + B)(y - \sqrt{3})^2 + (Cy + D)(3y + \sqrt{3})^2 \iff \\
& \iff y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = y^3(A + 9C) + y^2(-2\sqrt{3}A + B + 6\sqrt{3}C + 9D) + \\
& \quad + y(3A - 2\sqrt{3}B + 3C + 6\sqrt{3}D) + 3(B + D) \iff \\
& \iff \begin{cases} A + 9C = 0 \\ -2\sqrt{3}A + B + 6\sqrt{3}C + 9D = 1 \\ 3A - 2\sqrt{3}B + 3C + 6\sqrt{3}D = 2\sqrt{3} \\ 3(B + D) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = 0 \\ D = \frac{1}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Indi

$$\lambda = - \int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{3dy}{(3y + \sqrt{3})^2} + \int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{dy}{(y - \sqrt{3})^2} = \left[ \frac{1}{3y + \sqrt{3}} - \frac{1}{y - \sqrt{3}} \right]_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \left( \frac{1}{6\sqrt{3} + 2\sqrt{21}} - \frac{\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{7}} - \frac{1}{6 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

Recuperando i vari pezzi abbiamo dunque che

$$I = -1 + \ln \left( \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3 + 2\sqrt{3}} \right) + 2\sqrt{3} - \sqrt{7}.$$

(b)  $I := \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$  : Effettuiamo subito la solita sostituzione  $x = \cosh(t)$  ottenendo

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} \frac{\sinh(t)}{\cosh(t) - \sinh(t)} dt = \int_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} \frac{\sinh(2t) + \cosh(2t) - 1}{2} dt = \\ &= \left[ \frac{\cosh(2t) + \sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \left[ \frac{e^{2t}}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \\ &= \left( \frac{1}{4} \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right) = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

(c)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4 - 1} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}$ .  
Essendo

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 1} \iff$$

$$\iff 1 = x^3(A + C + D) + x^2(B + C - D) + x(C + D - A) + C - B - D \iff$$

$$\iff \begin{cases} A + C + D = 0 \\ B + C = D \\ C + D = A \\ C = B + D + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)} &= \left[ -\frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^{+\infty} = \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \ln(3) + \frac{1}{2} \arctan(2). \end{aligned}$$

(d)  $\int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^2 + 7x + 12} dx = \int_{-2}^0 x - 7 + \frac{37x + 84}{x^2 + 7x + 12} dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 7x \right]_{-2}^0 +$   
 $+ \frac{37}{2} \int_{-2}^0 \frac{2x + \frac{168}{37} + 7 - 7}{x^2 + 7x + 12} dx = -16 + \frac{37}{2} \left[ \ln(x^2 + 7x + 12) \right]_{-2}^0 +$   
 $- \frac{91}{2} \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 7x + 12} dx = -16 + \frac{37}{2} \ln(6) - \frac{91}{2} \int_{-2}^0 \frac{1}{(x + 3)(x + 4)} dx.$   
Essendo

$$\frac{1}{(x + 3)(x + 4)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 4} = \frac{x(A + B) + 4A + 3B}{(x + 3)(x + 4)} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^2 + 7x + 12} dx = -16 + \frac{37}{2} \ln(6) - \frac{91}{2} \left[ \ln \left( \frac{x+3}{x+4} \right) \right]_{-2}^0 = -16 + 64 \ln(2) - 27 \ln(3).$$

(e)  $I := \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \sin(x) + \cos(x) - 1}$  : Dobbiamo effettuare la sostituzione  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , ottenendo

$$I = - \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dt}{t(t-2)} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{t} - \frac{1}{t-2} dt = \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{t}{t-2} \right| \right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{3} - 1).$$

(f)  $\int_1^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} dx$  : Qui ci basta effettuare la sostituzione  $x^3 - 1 = t^2$  per ottenere

$$\int_1^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{7}} t^2 + 1 dt = \frac{2}{3} \left[ \frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{20\sqrt{7}}{9}.$$

(g)  $I := \int_{\frac{4}{3}}^2 x \log(1 - 2x - 3x^2) dx$  : Dobbiamo applicare un'integrazione per parti con  $f'(x) = x$  e  $g(x) = \ln(1 - 2x - 3x^2)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{4}{3}}^2 x \log(1 - 2x - 3x^2) dx &= \left[ \frac{x^2}{2} \ln(1 - 2x - 3x^2) \right]_{\frac{4}{3}}^2 - \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{x^2(3x+1)}{3x^2+2x-1} dx = \\ &= 2 \ln(15) - \frac{8}{9} \ln(7) - \int_{\frac{4}{3}}^2 x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)} dx = 2 \ln(15) - \frac{8}{9} \ln(7) + \\ &- \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right]_{\frac{4}{3}}^2 - \frac{1}{3} \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)} dx = 2 \ln(15) - \frac{8}{9} \ln(7) - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)} dx. \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)} &= \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{x(A+3B) + A - B}{(3x-1)(x+1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A + 3B = 5 \\ A - B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= 2 \ln(15) - \frac{8}{9} \ln(7) - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{3x-1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} dx = \\ &= 2 \ln(15) - \frac{8}{9} \ln(7) - \frac{8}{9} - \left[ \frac{1}{18} \ln(3x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_{\frac{4}{3}}^2 = \frac{35}{18} \ln(5) + \frac{19}{18} \ln(3) - \frac{7}{18} \ln(7) - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

**NB.** Nella risoluzione dell'esercizio abbiamo, ovviamente, considerato  $\ln(1 - 2x - 3x^2) = \ln|1 - 2x - 3x^2|$ , perché altrimenti l'integrale non sarebbe stato reale.

$$(h) \quad I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1)^2 |\cos(x)| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \cos(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1)^2 \cos(x) dx.$$

Entrambi gli integrali si risolvono applicando la regola di integrazione per parti con  $f(x) = (x+1)^2$  e  $g'(x) = \cos(x)$  :

$$\begin{aligned} I &= \left[ (x+1)^2 \sin(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin(x) dx - \left[ (x+1)^2 \sin(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1) \sin(x) dx = \\ &= 3\pi^2 + 4\pi + 4 - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin(x) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1) \sin(x) dx. \end{aligned}$$

A questo punto dobbiamo applicare un'altra volta la regola di integrazione per parti con  $f(x) = x+1$  e  $g'(x) = \sin(x)$  :

$$\begin{aligned} I &= 3\pi^2 + 4\pi + 4 - 2 \left\{ \left[ -(x+1) \cos(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \right\} + \\ &\quad + 2 \left\{ \left[ -(x+1) \cos(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) dx \right\} = \\ &= 3\pi^2 + 4\pi + 4 - 2 \left[ \sin(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \left[ \sin(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 3\pi^2 + 4\pi - 4. \end{aligned}$$

5. (a) Ricordiamo che

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

con  $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , se  $z = x + iy$ . Pertanto

$$\operatorname{Log}(-1 - \sqrt{3}i) = \ln(2) + i \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \ln(2) + i \left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Vogliamo vedere quali sono le radici terze di  $i$  : per fare questo poniamo  $z = \sqrt[3]{i}$  e troviamo che

$$z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \implies z = e^{i\frac{\pi}{6} + \frac{2ki\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Dunque

$$\sqrt[3]{i} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \end{cases}$$

(c)  $(1+i)^i = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + 2ki\pi})^i = (\sqrt{2})^i e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi} = (\sqrt{2})^i e^{-\frac{\pi}{4}(8k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Scriviamo  $(\sqrt{2})^i = 2^{\frac{i}{2}}$  nella forma  $x + iy$  :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{i}{2}} = x + iy &\iff e^{\operatorname{Log}\left(2^{\frac{i}{2}}\right)} = e^{\operatorname{Log}(x+iy)} \iff \\ &\iff \frac{i}{2} \ln(2) = \operatorname{Log}(x+iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Tale uguaglianza é verificata se e solo se

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\ln(2)}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \tan\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) \\ x^2 \left(1 + \tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} \\ y = \frac{\tan\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} \end{cases}$$

Ergo

$$(1+i)^i = \left( \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} + i \frac{\tan\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} \right) e^{-\frac{\pi}{4}(8k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

6. (a) Abbiamo che

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-2)n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(n-2)} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Verifichiamo la convergenza sul bordo del disco di convergenza :

$$\left| \frac{(n-2)!}{n^n} z^n \right| = \frac{(n-2)!}{n^n} e^n = \frac{n!}{n^n} \frac{e^n}{(n-1)n} \approx \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} \frac{e^n}{n^{n+1}(n-1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}(n-1)} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

poiché per la formula di Stirling  $n! \approx \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$  e  $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  per il criterio di infinitesimo. Dunque la serie converge anche sul bordo del disco di convergenza. Pertanto possiamo concludere che la serie converge se e solo se  $|z| \leq e$ .

(b) Per studiare questa serie effettuiamo il cambio di variabili  $w = -(2z)^2$  riconducendoci, così, a studiare la serie di potenze

$$\sum_{n \geq 1} \frac{w^n}{2n}.$$

In tal caso abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n}}} = 1.$$

E' evidente che se  $|w| = 1$  la serie diverge. Riapplicando il cambio di variabili abbiamo dunque che  $R = \frac{1}{2}$  e per lo stesso motivo se  $|z| = \frac{1}{2}$  la serie diverge. Non vi é dunque convergenza sul bordo del disco di convergenza, cioè la serie converge se e solo se  $|z| < \frac{1}{2}$ .