Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 8 - 23 Aprile 2014

1. (a) $\begin{cases} \mathrm{Re}(\overline{z}(z+i)) \leq 2 \\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \end{cases}$: Sia $z = a + ib$. Abbiamo che

$$\mathrm{Re}(\overline{z}(z+i)) = \mathrm{Re}((a-ib)(a+(b+1)i)) = \mathrm{Re}(a^2 + a(b+1)i - abi + b(b+1)) =$$
$$= \mathrm{Re}(a^2 + b^2 + b + ai) = a^2 + b^2 + b$$

quindi

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\overline{z}(z+i)) \leq 2 \\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 + b \leq 2 \\ b \geq 0 \end{cases} .$$

Dalla prima riga del sistema otteniamo che

$$a^2 \leq 2 - b - b^2 \iff a \in \left[-\sqrt{2-b-b^2}, \sqrt{2-b-b^2}\right]$$

con la condizione implicita che

$$2 - b - b^2 \geq 0 \iff b^2 + b - 2 \leq 0 \iff b \in [-2, 1] .$$

Per la seconda riga del sistema questa condizione diventa $b \in [0,1]$ e dunque

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\overline{z}(z+i)) \leq 2 \\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) \in \left[-\sqrt{2-\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}^2(z)}, \sqrt{2-\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}^2(z)}\right] \\ \mathrm{Im}(z) \in [0,1] \end{cases} ;$$

(b) $\begin{cases} z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \\ \mathrm{Re}(z) = 1 \end{cases}$: Abbiamo che

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \iff z^3 = \frac{-7 \pm 9}{2} = \begin{cases} +1 = e^{2i\pi} \\ -8 = 8e^{i\pi} \end{cases} .$$

Ora

- $z^3 = e^{2i\pi} \iff z = e^{\frac{2}{3}i\pi + \frac{2}{3}ki\pi},\ k = 0,1,2 \iff z = \begin{cases} e^{\frac{2}{3}i\pi} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ e^{\frac{4}{3}i\pi} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \\ e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) \end{cases}$

$$\iff z = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{cases} \implies z = 1 \text{ é l'unica accettabile tra queste tre ;}$$

- $z^3 = 8e^{i\pi} \iff z = 2e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}ki\pi},\ k = 0,1,2 \iff z = \begin{cases} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ 2e^{i\pi} = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\ 2e^{\frac{5}{3}i\pi} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) \end{cases}$

$$\iff z = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \\ -2 \\ 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \end{cases} \implies \text{sono accettabili le soluzioni}$$

$z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Pertanto le soluzioni del sistema sono $z = 1$ e $z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

2. Ricordiamo che
$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i \ \arg(z)$$
con $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se $z = x + iy$.
Pertanto
   (a) $\mathrm{Log}\left(\frac{4i}{2-i} + \frac{7-2i}{4+2i}\right) = \mathrm{Log}\left(\frac{4i(2+i)}{5} + \frac{(7-2i)(4-2i)}{20}\right) = \mathrm{Log}\left(\frac{2}{5} + \frac{i}{2}\right) =$
   $= \ln\left(\sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{4}}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}\right) + 2k\pi\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{41}}{10}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{5}{4}\right) + 2k\pi\right)$,
   $k \in \mathbb{Z}$;
   (b) $\mathrm{Log}\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - e^2\right) = \ln\left(\sqrt{e^4 + \frac{1}{2}}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-e^2}\right) + 2k\pi\right) =$
   $= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^4+1}{2}\right) + i\left(2k\pi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}e^2}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
   (c) $\mathrm{Log}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \ln(2) + i(\arctan(1) + 2k\pi) = \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
   (d) $\mathrm{Log}(\sin(i)) = \mathrm{Log}(i\sinh(1)) = \ln(\sinh(1)) + i\left(\arctan(\sinh(1)) + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Per svolgere questo esercizio basta ricordare le seguenti formule:
   - $\int x^n \ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ c$
   - $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \ dx = \ln(f(x)) + \ c$
   - $\int f^n(x)f'(x) \ dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + \ c$
   - $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \ dx = \arctan(f(x)) + \ c$
   - $\int e^{f(x)}f'(x) \ dx = e^{f(x)} + \ c$

   Ricordiamo, inoltre, che $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
   Possiamo ora partire con la risoluzione dell'esercizio :
   (a) $\displaystyle\int x^7 - 5x^{24} + 12x^3 + 712x \ dx = \frac{x^8}{8} - \frac{x^{25}}{5} + 3x^4 + 356x^2 + c$;
   (b) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x) \ dx = \int \frac{\sin(2x)}{2} \ dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + c \ = \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{4} + c \ =$
   $\displaystyle= \frac{2\sin^2(x) - 1}{4} + c \ = \frac{\sin^2(x)}{2} - \frac{1}{4} + c \ = \frac{\sin^2(x)}{2} + \tilde{c}$;
   (c) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+3} \ dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+3} \ dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+3x+3) + \ c$;
   (d) $\displaystyle\int \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \ dx = 3\ln(x) + \frac{1}{x} + \ c$;
   (e) $\displaystyle\int xe^{x^2} \ dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} \ dx = \frac{1}{2} \ e^{x^2} + \ c$;
   (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cosh(x)} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} \ dx = \arctan(e^x) + \ c$;
   (g) $\displaystyle\int \tan(x) \ dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \ dx = -\ln(\cos(x)) + \ c$;
   (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \ dx = \ln(\ln(x)) + \ c$;
   (i) $\displaystyle\int \tan^2(x) - \sqrt{x} \ dx = \int 1 + \tan^2(x) - 1 - \sqrt{x} \ dx = \tan(x) - x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \ c$;

(j) $\int \cos^3(x)\ dx = \int \cos(x)(1-\sin^2(x))\ dx = \int \cos(x) - \cos(x)\sin^2(x)\ dx =$
$= \sin(x) - \dfrac{\sin^3(x)}{3} +\ c$;

(k) $\int \sqrt[7]{x^2} - \sqrt{2x^3} + \sqrt[6]{x^5} + e^x\ dx = \dfrac{7}{9}x\sqrt[7]{x^2} - \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x} + \dfrac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5} + e^x +\ c$;

(l) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) +\ c$.

4. La formula di integrazione per parti ci dice che

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx\ .$$

Tutto ció che dobbiamo fare nel seguente esercizio é comprendere quale siano le giuste $f(x)$ e quali le giuste $g'(x)$ nei vari integrali assegnati :

(a) $\int \cos^2(x)\ dx$: In tal caso la scelta é obbligata. Dobbiamo porre $f(x) = \cos(x)$ e $g'(x) = \cos(x)$: cosí facendo, difatti, otteniamo che

$$\int \cos^2(x)\ dx = \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\ dx = \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\ dx =$$

$$= \cos(x)\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\ dx\ .$$

Pertanto, posto $A(x) := \int \cos^2(x)\ dx$ abbiamo che

$$A(x) = \cos(x)\sin(x) + x - A(x) \Longrightarrow 2A(x) = \cos(x)\sin(x) + x + c$$

$$\Longrightarrow A(x) = \frac{\cos(x)\sin(x) + x}{2} +\ \tilde{c}\ ;$$

(b) $\int \sin^2(x)\ dx = \int 1 - \cos^2(x)\ dx = x - \left(\dfrac{\cos(x)\sin(x) + x}{2}\right) +\ c\ =$
$= \dfrac{x - \cos(x)\sin(x)}{2} + c$. In tal caso abbiamo sfruttato il risultato ottenuto nell'integrale (a) per trovare la primitiva dell'integranda assegnata. Dovendo trovarla ignorando il valore dell'integrale (a) avremmo dovuto applicare la regola di integrazione per parti alle funzioni $f(x) = \sin(x)$ e $g'(x) = \sin(x)$;

(c) $\int e^x \sin(x)\ dx$: In questo caso possiamo applicare la regola di integrazione per parti come preferiamo. Nello specifico considereremo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \sin(x)$. C'é solo una piccola constatazione da fare : questo é un integrale in cui la regola di integrazione per parti va applicata piú di una volta! Bisogna tenere a mente che quando ci si trova dinanzi un integrale di questo tipo bisogna continuare sempre per la stessa strada altrimenti si ritornerá al punto di partenza, cioé : applicando la regola di integrazione per parti otterremo che

$$\int e^x \sin(x)\ dx = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\ dx\ .$$

A questo punto dovremmo ri-applicare la regola ponendo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos(x)$ in maniera obbligata! Se ponessimo, difatti, $f(x) = \cos(x)$ e $g'(x) = e^x$ torneremmo al punto di partenza (esattamente come se togliessimo una radice da un'equazione elevando i termini da ambo le parti e al passaggio successivo riapplicassimo la radice da ambo le parti). Effettuando la giusta scelta otterremo che

$$\tilde{A}(x) := \int e^x \sin(x)\ dx = -e^x \cos(x) + \left(e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\ dx\right) =$$

$$= e^x(\sin(x) - \cos(x)) - \tilde{A}(x) \Longrightarrow \tilde{A}(x) = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2} +\ c\ ;$$

(d) $\displaystyle\int e^x \cos(x)\ dx$: Integrale completamente analogo al (c). Per variare un pó nella risoluzione applicheremo la regola ponendo $f(x) = \cos(x)$ e $g'(x) = e^x$, ottenendo che

$$\tilde{B}(x) := \int e^x \cos(x)\ dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\ dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \left(e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\ dx\right) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) - \tilde{B}(x)$$

$$\Longrightarrow \tilde{B}(x) = \frac{e^x(\cos(x) + \sin(x))}{2} +\ c\ ;$$

(e) $\displaystyle\int \ln(x)\ dx$: In questo caso la scelta delle funzioni é obbligata. Poniamo $f(x) = \ln(x)$ e $g'(x) = 1$ ottenendo che

$$\int \ln(x)\ dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x +\ c\ ;$$

(f) $\displaystyle\int \arctan(x)\ dx$: Esattamente come per l'integrale precedente poniamo $f(x) = \arctan(x)$ e $g'(x) = 1$ ottenendo che

$$\int \arctan(x)\ dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\ dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx =$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +\ c\ ;$$

(g) $\displaystyle\int x^3 e^x\ dx$: In tal caso andiamo a chiamare $f(x) = x^3$ e $g'(x) = e^x$ per un motivo logico; in tale maniera, difatti, applicando la regola di integrazione per parti andiamo ad abbassare il grado del polinomio di 1. Ció ci fa intendere che se abbiamo un polinomio di grado n applicando n volte la regola di integrazione per parti esso sparirá dall'integranda! Quindi

$$\int x^3 e^x\ dx = x^3e^x - 3\int x^2 e^x\ dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c\ ;$$

(h) $\displaystyle\int x\arctan(x)\ dx$: In tal caso la scelta giusta da effettuare é chiamare $f(x) = \arctan(x)$ e $g'(x) = x$ ottenendo che

$$\int x\arctan(x)\ dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{x^2+1}\ dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan(x) +\ c\ = \frac{(x^2+1)\arctan(x) - x}{2} +\ c\ .$$

5. Il trucco per risolvere i seguenti integrali é quello di scomporre il denominatore nel prodotto di polinomi irriducibili e poi, tramite conti algebrici, spezzare l'integrale in somma di piú integrali, che risulteranno semplici da risolvere. Guardando un paio di esempi il meccanismo di risoluzione risulterá immediatamente chiaro e semplice, seppur sará evidente che per la risoluzione di tali esercizi bisognerá svolgere molti conti. Per non utilizzare piú spazio del necessario i passaggi di risoluzione dei sistemi saranno omessi e nelle soluzioni saranno compattati il piú possibili i termini logaritmici.

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x-8} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+4)}$: Abbiamo che

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{x(A+B)+4A-2B}{(x-2)(x+4)}$$

$$\Longleftrightarrow_{(*)} \begin{cases} A+B=0 \\ 4A-2B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

   ove il passaggio $(*)$ é giustificato dal principio di identitá dei polinomi. Dunque

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-8} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+4}\, dx = \frac{1}{6}(\ln(x-2)-\ln(x+4)) + \ c =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-2}{x+4}\right) + \ c\ ;$$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+x+2}dx = \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x+2)}\, dx$: Abbiamo che

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{x^2(A+C)+x(2A+B)+2B+C}{(x^2+1)(x+2)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B=1 \\ 2B+C=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{5} \\ B=\frac{3}{5} \\ C=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

   Dunque

$$\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+x+2}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{x+3}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\, dx = \frac{1}{10}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx +$$

$$+\frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{5}\ln(x+2) + \ c \ = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4x+4}\right) + \frac{3}{5}\arctan(x) + \ c\ ;$$

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-6x^2+11x-6} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$: Abbiamo che

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C)+x(-5A-4B-3C)+6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque

$$\int \frac{dx}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{1}{2}\ln(x-1)-\ln(x-2)+\frac{1}{2}\ln(x-3)+c = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-2}\right)+c\,;$$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}dx = \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+3)(x+1)^2}\,dx$: Abbiamo che

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+3)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^3(A+C)+x^2(2A+B+D)+x(A+2B+3C)+B+3D}{(x^2+3)(x+1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+D=1 \\ A+2B+3C=1 \\ B+3D=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{8} \\ B=\frac{5}{8} \\ C=-\frac{1}{8} \\ D=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{x+5}{x^2+3}-\frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx+\frac{5}{8}\int \frac{dx}{x^2+3}-\frac{1}{16}\int \frac{2x+2-4}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)+\frac{5}{8}\int \frac{dx}{x^2+3}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)+\frac{5}{8\sqrt{3}}\int \frac{\frac{dx}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}-\frac{1}{4(x+1)} =$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)+\frac{5}{8\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4(x+1)}+\ c\,;$$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx = \int \frac{x^3+x+1}{(x+2)^2(x-1)^2}\,dx$: Abbiamo che

$$\frac{x^3+x+1}{(x+2)^2(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^3(A+C)+x^2(-2A+B+4C+D)+x(A-2B+4C+4D)+B+4D}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ -2A+B+4C+D=0 \\ A-2B+4C+4D=1 \\ B+4D=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{7}{9} \\ B=\frac{5}{9} \\ C=\frac{2}{9} \\ D=\frac{1}{9} \end{cases}$$

Dunque

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{7x+5}{(x+2)^2}+\frac{2x+1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{7}{18}\int \frac{2x+\frac{10}{7}+4-4}{(x+2)^2}\,dx + \frac{1}{9}\int \frac{2x-2+3}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{7}{18}\ln((x+2)^2) - \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{1}{9}\ln((x-1)^2) + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{7}{9}\ln(x+2) + \frac{2}{9}\ln(x-1) + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3(x-1)} + \ c\ ;$$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$: In questo caso il polinomio al denominatore non ha radici in $\mathbb{R}$ e quindi la sua scomposizione si ottiene nella seguente maniera: poniamo

$$x^4+x^2+1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d);\ \ a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

verificata se e solo se

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d+ac=1 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases}$$

Questo sistema non ha un'unica soluzione perché, ad esempio, essendo $b=d=1$, abbiamo che i valori di a e c sono interscambiabili. In ogni modo, risolvendo il sistema scopriamo che

$$x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)\ .$$

Pertanto

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\ .$$

Ora possiamo procedere come al solito :

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{x^3(A+C)+x^2(-A+B+C+D)+x(A-B+C+D)+B+D}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\iff \begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=0 \\ A-B+C+D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x-1-1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{x^2-x+1}\right) .$$

Ora

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

e

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

pertanto

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)+c\,;$$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$: La scomposizione effettuata si ottiene risolvendo lo stesso sistema (cambiando i valori ovviamente) dell'esercizio precedente. Dopo esser riusciti a scomporre il polinomio si procede come di regola :

$$\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} =$$

$$= \frac{x^3(A+C)+x^2(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)+x(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)+B+D}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$\iff \begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) .$$

Ora

$$\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

e

$$\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{2}\ dx}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)$$

quindi

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}\right)+\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right)+c\,;$$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$: Anche in questo caso potremmo scomporre il polinomio al denominatore nel prodotto di tre polinomi di secondo grado generici risolvendo un sistema come per l'esercizio precedente. Tuttavia, per variare, tentiamo un approccio differente:

$$x^6+1=0 \iff x^6=-1=e^{i\pi} \iff x=e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{ik\pi}{3}},\ k=0,\cdots,5\ .$$

Quindi le radici del polinomio sono $x_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $x_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $x_3 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$ ed i loro coniugati. Pertanto

$$x^6+1 = (x-x_1)(x-\overline{x}_1)(x-x_2)(x-\overline{x}_2)(x-x_3)(x-\overline{x}_3) =$$

$$= (x^2-(x_1+\overline{x}_1)x+|x_1|)(x^2-(x_2+\overline{x}_2)x+|x_2|)(x^2-(x_3+\overline{x}_3)x+|x_3|)\ .$$

Essendo

$$|x_i| = 1\ ,\quad i=0,1,2$$

e

$$\begin{cases} x_1+\overline{x}_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \\ x_2+\overline{x}_2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ x_3+\overline{x}_3 = 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

abbiamo che

$$x^6+1 = (x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+1)$$

che ci dice che

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+1)}\ .$$

A questo punto possiamo procedere come al solito:

$$\frac{1}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^5(A+C+E)+x^4(\sqrt{3}(C-A)+B+D+F)+x^3(\sqrt{3}(D-B)+2A+2C-E)}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+1)}+$$

$$+\frac{x^2(\sqrt{3}(C-A)+2B+2D-F)+x(\sqrt{3}(D-B)+A+C+E)+B+D+F}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+1)}$$

$$\iff \begin{cases} A+C+E=0 \\ -\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D+F=0 \\ 2A-\sqrt{3}B+2C+\sqrt{3}D-E=0 \\ -\sqrt{3}A+2B+\sqrt{3}C+2D-F=0 \\ A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D+E=0 \\ B+D+F=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ B=\frac{1}{3} \\ C=-\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ D=\frac{1}{3} \\ E=0 \\ F=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{x+\frac{2}{\sqrt{3}}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{x-\frac{2}{\sqrt{3}}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,dx + \frac{1}{3}\arctan(x) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{2x+\frac{4}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,dx - \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{2x-\frac{4}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,dx + \frac{1}{3}\arctan(x) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right) + \frac{1}{3}\arctan(x) + \frac{1}{12}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,dx\,.$$

Essendo

$$\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{3}x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = 2\int \frac{2\;dx}{(2x+\sqrt{3})^2+1} = 2\arctan(2x+\sqrt{3})$$

e

$$\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{3}x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = 2\int \frac{2\;dx}{(2x-\sqrt{3})^2+1} = 2\arctan(2x-\sqrt{3})$$

possiamo concludere che

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right) + \frac{\arctan(2x+\sqrt{3})+\arctan(2x-\sqrt{3})+2\arctan(x)}{6} + c\,.$$