

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 9 - 17 Dicembre 2013

1. Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = |y(x)|^\alpha \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione $\iff \alpha \geq 1$, e determinare esplicitamente tale soluzione. Per $\alpha \in (0, 1)$ esibire tre soluzioni distinte.

2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = z(x)(y(x) + z(x))^n \\ z'(x) = y(x)(y(x) + z(x))^n \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$.

(Suggerimento: Si consideri il cambio di variabile $\begin{cases} u(x) = y(x) + z(x) \\ v(x) = y(x) - z(x) \end{cases}$)

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy al variare del dato iniziale y_0 , determinando l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni:

(a) $\begin{cases} y'(x) = y^3(x) - y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'(x) = \begin{cases} y(x) \log |y(x)| & \text{se } y(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } y(x) = 0 \end{cases} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

4. Dato il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 2) \end{cases}$ determinare i punti di equilibrio e trovare una costante del moto.

5. Sia dato il sistema dinamico planare $\begin{cases} \dot{\theta} = (2y - \sin \theta)e^y \\ \dot{y} = ye^y \cos \theta \end{cases}$.

Mostrare che la funzione $H(\theta, y) = y^2 - y \sin \theta$ è una costante del moto per il sistema.

6. Sia $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Studiare il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (2, 1) \end{cases}$, nei casi in

cui sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Sia $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Studiare il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (0, 3, 2) \end{cases}$,
ove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (*) Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$ senza sfruttare l'integrale di Dirichlet.