

I Esonero di AM110 - 4/11/2014

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tema 1 [5 punti] Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli, deducendone poi il limite notevole $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{p} = 1, p > 0$.

Tema 2 [5 punti] Che cosa si può dire sul limite di una successione monotona? Quali sono le conseguenze nello studio delle serie a termini positivi?

Tema 3 [5 punti] Dopo aver fornito la definizione di punto di accumulazione, enunciare e dimostrare il Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Esercizio 1 [3 punti] Mostrare per induzione la validità dell'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$

Quanto vale la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$?

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n + n!}}{n \sqrt[n]{\frac{\log^2 n}{n}}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n! + n^2} - \sqrt{n! + 4^n}}{\sqrt{n! + 3^n} - \sqrt{2n!}}.$$

Esercizio 3 [3 punti] Calcolare sup ed inf del seguente insieme, specificando se si tratta di massimo o minimo:

$$E = \{(-1)^n \cos \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{5n + 7}{2n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 4 [3 punti] Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}.$$