

Tutorato di AM110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: Giulio Fiorillo e Alessandro Mazzoccoli

TUTORATO 9

10 DICEMBRE 2014

1. Dimostrare che sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione inniettiva allora $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ e' una metrica.
2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica se $\exists T : f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ Dimostrare che tali funzioni non ammettono limite per $x \rightarrow \infty$ a meno che non siano costanti

3. Calcola i seguenti limiti di funzioni

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\pi \frac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\beta} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\gamma} b_n x^n}$ al variare di $\gamma, \beta \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{(x^2+1)}(x^3 + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan(x)} - \sqrt{1 - \tan(x)}}{\sin(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi(1-x)}{2} \right)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x (e^{\frac{1}{x}} - 1)x^k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

4. Sia $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ \lambda x + 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ dire al variare di λ se f è continua surriettiva o inniettiva nel caso in cui non è ne inniettiva ne surriettiva indicare quale è il dominio in cui è possibile invertire la funzione

5. Dimostrare che $f : A \rightarrow B$ e' inniettiva $\Leftrightarrow \forall X, Y \subseteq A, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

6. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini positivi monotona crescente dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^n (1 + a_j)}$ converge