AM210 2014-2015: I Settimana

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Sia Λ un insieme, I un intervallo e $f : \Lambda \times I \to \mathbf{R}$ una famiglia di funzioni reali di variabile reale dipendente da un 'parametro' $\lambda \in \Lambda$. Ad esempio, se $\Lambda = \mathbf{N}$, si tratta di una successione di funzioni in I. Se la funzione $f^\lambda : x \to f(\lambda, x)$ é, per ogni λ, integrabile (eventualmente in senso improprio) in $I = (a, b), -\infty \le a < b \le +\infty$, resta definita la funzione (o *integrale dipendente da parametro*, il parametro λ)

$$\lambda \to \int_a^b f^\lambda(t)dt \ := \ \int_a^b f(\lambda, t)dt$$

Un esempio importante é dato dalla **funzione Γ di Eulero**, definita dall'integrale

$$\Gamma(s) \ := \ \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad s > 0$$

per la quale vale la seguente formula asintotica o **Formula di Stirling**

$$\Gamma(s+1) \ = \ s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \ + \ \circ(1) \right], \qquad \circ(1) \to_{s \to +\infty} 0$$

Tale formula dá in particolare il comportamento asintotico del fattoriale, giacché $\Gamma(n+1) = n!$
Rientrano nella fattispecie di integrali dipendenti da parametro importanti *trasformazioni integrali*:

$$\lambda \to \mathcal{L}(f)(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt \qquad (trasformata \quad di \quad Laplace)$$

Esempi: $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}\,, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t\, dt = \frac{1}{1+\lambda^2}$ *(integrando due volte per parti)*

$$\omega \to \mathcal{F}(f)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \qquad (trasformata \quad di \quad Fourier)$$

Nel caso $\Lambda = \mathbf{N}$, una importante trasformazione integrale é data da

$$n \to \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad \textit{(coefficenti di Fourier di } f\textit{)}$$

DIPENDENZA CONTINUA

Ricordiamo un fatto ben noto (ed ovvio): siano φ_n limitate e integrabili in $[a, b]$.

$$\text{Allora} \qquad \varphi_n \to_n \varphi \quad uniformemente \quad in \quad [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \varphi_n(x)dx \to \int_a^b \varphi(x)dx$$

Da ció segue subito un teorema di dipendenza continua di integrali dipendenti da un parametro $\tau \in [c, d]$:

Teorema 1. Sia $f : [c, d] \times [a, b] \to \mathbf{R}$, $\quad f^\tau(x) := f(\tau, x) \quad \tau \in [c, d],\ x \in [a, b]$. Se f^τ é integrabile in $[a, b] \quad \forall \tau \in [c, d]$, e $t \in [c, d]$ é tale che

$$\tau_n \to t \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in[a,b]} |f(\tau_n, x) - f(t, x)| \to_n 0 \qquad\qquad (UConv)$$

(cioé $f^{\tau_n}(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$ ad $f^t(x)$), allora

$$t_n \to t \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t_n, x)\, dx \to_n \int_a^b f(t, x)\, dx \qquad \text{ovvero}$$

$$F(\tau) := \int_a^b f(\tau, x)\, dx \qquad \text{é continua in} \quad t$$

NOTA $(UConv)$ sussiste se f é *UNIFORMEMENTE CONTINUA* in $[c, d] \times [a, b]$, ovvero se $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0$ tale che

$$t_1, t_2 \in [c, d], x_1, x_2 \in [a, b], \quad (t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \le \delta_\epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \le \epsilon$$

In effetti, in ipotesi di uniforme continuitá di f, la continuitá (uniforme!) di $t \to \int_a^b f(t, x)dx$ si vede subito: $\forall t, \tau \in [c, d]$,

$$|t - \tau| \le \delta_\epsilon \Rightarrow |f(t, x) - f(\tau, x)| \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(t, x)\, dx - \int_a^b f(\tau, x)\, dx \right| \le \epsilon(b - a).$$

A sua volta *l'uniforme continuitá di* f *in* $[c, d] \times [a, b]$ *é assicurata dalla continuitá di* f *in ogni punto di* $[c, d] \times [a, b]$, ove f continua in $(t, x) \in [c, d] \times [a, b]$ sse

$$(t_n, x_n) \in [c, d] \times [a, b], \quad t_n \to_n t, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad f(t_n, x_n) \to_n f(t, x)$$

Per concludere, **se f é continua in** $[c, d] \times [a, b]$ **allora** $t \to \int_a^b f(t, x)dx$ **é continua in** $[c, d]$.

Dipendenza continua negli integrali impropri dipendenti da parametro

Diamo ora un teorema, e la sua dimostrazione diretta, sulla continuitá di integrali dipendenti da parametro nel caso improprio.

Una f definita in $[c,d] \times (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ si dice **equidominata** in (a,b) (dominata, in (a,b), *uniformemente* al variare di $t \in [c,d]$), se

$$\exists\ g \in C((a,b)) \quad \text{tale che} \quad \int_a^b |g(x)|dx < +\infty$$

e

$$|f(t,x)| \leq g(x) \qquad \forall (t,x) \in [c,d] \times (a,b)$$

Teorema 2 Se (i) f é equidominata in $[c,d] \times (a,b)$

e se (ii) $\tau_n \in [c,d], \quad \tau_n \to_n t \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_{x \in [\alpha,\beta] \subset (a,b)} |f(\tau_n, x) - f(t,x)| \to_n 0$

per ogni $[\alpha,\beta] \subset (a,b,)$ allora $F : \tau \to \int_a^b f(\tau,x)\,dx$ é continua in t, ovvero

$$t_j \in [c,d], \quad t_j \to_j t \quad \Rightarrow \quad \lim_j \int_a^b f(t_j,x)\,dx = \int_a^b \lim_j f(t_j,x)\,dx$$

In particolare, se vale (i) e f é continua in $(c,d) \times (a,b))$ allora F é continua in (c,d).

Prova. Notiamo innanzi tutto che $\int_a^b |f(t,x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx < +\infty \quad \forall t \in [c,d]$, cioé, per ogni $t \in [c,d]$, la funzione $x \to f(t,x)$ é (assolutamente) integrabile (in senso generalizzato) in (a,b). Fissiamo ora $\epsilon > 0$. Da $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ segue:

$$\exists\, a < a_\epsilon < b_\epsilon < b,\ \delta_\epsilon > 0 : \qquad \int_a^{a_\epsilon} g(x)dx + \int_{b_\epsilon}^b g(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Inoltre, l'ipotesi (ii) assicura che $\int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f(t_j,x) - f(t,x)|\,dx \to_j 0$ e quindi

$$\limsup_j \int_a^b |f(t_j,x) - f(t,x)|\ dx \ \leq 2\int_a^{a_\epsilon} g(x)dx + 2\int_{b_\epsilon}^b g(x)dx \leq \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

$$\text{e quindi} \qquad \int_a^b |f(t_j,x) - f(t,x)|\ dx \ \to_j \ 0$$

UN ESEMPIO Sia $\alpha > 0$. Sia $f_\alpha(t,x) := |t|^\alpha \frac{x}{(3t^2+x^2)^2}$, se $t \neq 0$, $f_\alpha(0,x) \equiv 0$.

f_α é una funzione continua in x (avendo fissato t), e continua in t (avendo fissato x). Cioé f_α é *separatamente continua* in x, in t.
Inoltre f_α é *continua nel complesso delle variabili* in ogni punto $(t,x) \neq (0,0)$. Trattandosi di una funzione omogenea di grado $\alpha - 3$ (perché $f_\alpha(st,sx) = s^{\alpha-3} f_\alpha(t,x)$) f_α é continua anche in $(0,0)$ sse $\alpha > 3$. Notiamo che , corrispondentemente, se $t_n \to_n 0$, la convergenza di $f_\alpha^{t_n}(x)$ a $f_\alpha^0 \equiv 0$ é uniforme in $[0,1]$, sse $\alpha > 3$.
In effetti, un calcolo diretto dice che $x \to |t|^\alpha \frac{x}{(3t^2+x^2)^2}$ ha, per ogni fissato $t \neq 0$ un unico punto stazionario in $[0,1]$, che é di massimo, e che si trova in $x = t$. Infatti,

$$\frac{d}{dx}\left[|t|^\alpha \frac{x}{(3t^2+x^2)^2}\right] = |t|^\alpha \frac{3(t^2-x^2)}{(3t^2+x^2)^3} < 0 \quad \Leftrightarrow |x| > |t|$$

Il massimo di f_α^t é quindi $\frac{|t|^{\alpha+1}}{16t^4}$, che va a zero per t che va a zero, appunto, sse $\alpha > 3$.

Continuitá di $F_\alpha(t) := \int_0^1 f_\alpha(t,x)dx$ (per paritá $t \in [0,+\infty)$...)

Come osservato f_α é continua in $(0,+\infty) \times [0,1]$, e quindi (Teorema 1!) F_α é continua in $(0,+\infty)$.
Per $\alpha > 3$, vista la continuitá di f in $[0,1] \times [0,1]$, il Teorema 1 assicura la continuitá di F_α anche in $t = 0$.
Notiamo peró che $F_\alpha(t) = |t|^\alpha \left[-\frac{1}{2(3t^2+x^2)}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{|t|^\alpha}{6t^2} - \frac{|t|^\alpha}{2(3t^2+1)}$, e quindi F_α é continua anche in $t = 0$ sse $\alpha > 2$.
Il Teorema 1 non é dunque preciso:
non predice infatti quando $\alpha \in (2,3]$ la continuitá, che di fatto c' é, in $t = 0$.
Il Teorema 2 colma questa lacuna.
Verifichiamo, per mostrarlo, che le ipotesi del Teorema 2 sono soddisfatte sse $\alpha > 2$.
La convergenza uniforme a zero, in $[\delta,+\infty)$, di $f_\alpha^{t_n}(x)$, segue dal fatto che, se $t_n < \delta$, $f_\alpha^{t_n}$, che decresce in $[t_n,+\infty)$ prende quindi il suo massimo valore in $[\delta,+\infty)$ in δ:

$$\sup_{x\geq\delta}\left[|t_n|^\alpha \tfrac{x}{(3t_n^2+x^2)^2}\right] = |t_n|^\alpha \tfrac{\delta}{(3t_n^2+\delta^2)^2} \to_{t_n\to 0} 0$$

Poi, $f_\alpha(t,x)$ é equidominata su $[0,1]$ al variare di t in $[0,M]$, $\forall M > 0$, sse $\alpha > 2$:
se $\alpha \geq 4$, $f_\alpha^t(x) \leq \frac{1}{9}\, t^{\alpha-4}$ per $x \in [0,1]$ (e $f_\alpha^t(x) \leq \frac{M^\alpha}{x^3}$ in $[1,+\infty)$..) e quindi $f_\alpha^t(x)$ é equidominata in $[0,+\infty)$ al variare di t in $[0,M]$
se $t \in [\delta,M]$, $f_\alpha^t(x) \leq \frac{M^\alpha x}{(3\delta^2+x^2)^2}$ $\forall x$, funzione integrabile in $[0,+\infty)$!
se $\alpha < 4$, da $\frac{d}{dt}\frac{t^\alpha x}{(3t^2+x^2)^2} = \frac{t^{\alpha-1}x[\alpha x^2-(12-3\alpha)t^2]}{(3t^2+x^2)^3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < x\sqrt{\frac{\alpha}{12-3\alpha}}$
segue $\max\limits_{t\in[0,\delta]} f_\alpha^t(x) = f_\alpha^t(x\sqrt{\frac{\alpha}{12-3\alpha}}) = \frac{c_\alpha}{x^{3-\alpha}}$ se $x\sqrt{\frac{\alpha}{12-3\alpha}} \leq \delta$ (e $x\sqrt{\frac{\alpha}{12-3\alpha}} \geq \delta \Rightarrow$ $f_\alpha^t(x) \leq f_\alpha^\delta(x) = \frac{\delta^\alpha x}{(3\delta^2+x^2)^2}$). Dunque $\int_0^1 \max\limits_{t\in[0,\delta]} f_\alpha^t(x)dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 2$.

UN ESEMPIO   Sia $F(t) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx.$

Siccome, fissato $t > 0$, $f^t(x) := \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}$ va a zero in modo esponenziale al tendere di x all'infinito, l'integrale é assolutamente convergente se $t > 0$ e quindi $F(t)$ é certamente definita per ogni $t > 0$. Ma F é definita anche per $t = 0$, perché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ é integrabile (anche se non assolutamente) in $[0, +\infty)$,   cioé,

$$\text{posto} \quad G(M) := \int\limits_0^M \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \exists G(\infty) := \lim_{M\to+\infty} G(M) \qquad \text{ed é finito}$$

Poi, fissato $\delta > 0$, $f(t,x) := \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}$ é equidominata, al variare di t in $[\delta, +\infty)$, da $g_\delta(t) := e^{-\delta x}$,   giacché

$$\left|\frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\right| \leq e^{-\delta x} \quad \forall t \geq \delta, \quad \forall x \geq 0$$

Concludiamo che $F : t \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx$ é continua in $(0, +\infty)$.

La continuitá in $t = 0$ non é garantita dal teorema sulla continuitá degli integrali (impropri) dipendenti da parametro, perché non é soddisfatta l'ipotesi di equidominatezza:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\right| \leq g(x) \quad \forall t > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\infty} g(x)dx = +\infty$$

Mostriamo tuttavia che, anche senza equidominatezza, vale in questo caso il passaggio al limite sotto segno di integrale

$$\lim_{t\to 0^+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-tx}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

cioé F é continua anche in $t = 0$. Infatti, da $\exists$, finito, $G(\infty)$,   segue che $|G(M) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $M \geq M_\epsilon$ ed $\exists C$ tale che $|G(M)| \leq C \quad \forall M \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x} dx = t \int\limits_0^{+\infty} G(x) e^{-tx} dx = \int\limits_0^{+\infty} G(\frac{s}{t}) e^{-s} ds \to_{t\to 0^+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ perché

$\int\limits_0^{+\infty} G(\frac{s}{t}) e^{-s} ds - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} [G(\frac{s}{t}) - G(\infty)] e^{-s} ds$ e $|\int\limits_0^{\delta} [G(\frac{s}{t}) - G(\infty)] e^{-s} ds| \leq$ $2M[1 - e^{-\delta}]$ e $\int\limits_\delta^{\infty} |G(\frac{s}{t}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon$ se $\frac{\delta}{x} \geq t_\epsilon$.

Un bell'esercizio: calcolo dell'integrale di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \textbf{(integrale di Dirichlet)}$$

Siccome $f(x,t) := \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$, $f_x = -e^{-tx}\sin t$ sono continue ed equidominate da $g(t) := e^{-t\underline{x}}$ in $[\underline{x}, +\infty) \times (0, \infty)$ per ogni $\underline{x} > 0$, si ha

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\, dt$$ e, come ricordato

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\, dt = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad \sharp$$

Da qui $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi} dt \;=\; \arctan\xi - \arctan x.$$

Ma $\sup\limits_{t\in K} |f(x,t) - f(t)| \to_{\|x\|\to\infty} 0$ $\quad\forall K \subset I$ compatto ed $f(x,t)$ é equidominata in $\{\|x\| \geq R\} \times I \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x,t)dt \to_{\|x\|\to\infty} \int_a^b f(t)dt$, e quindi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi} dt \overset{\xi\to+\infty}{\to} 0$.

Ció implica, per quanto sopra, che $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \;=\; \frac{\pi}{2}$. Resta da provare che

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt$$

cioé che $h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ é continua in $x = 0$. *Il Teorema sulla dipendenza continua non si applica tuttavia in questo caso, perché non c'é equidominatezza:* $\exists g \geq 0 : \int_0^{\infty} g < \infty$ e $|\frac{\sin t}{t} e^{-tx}| \leq g(t) \quad \forall x > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt < \infty$, mentre $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$. Diamo qui una dimostrazione ad hoc.

Se $G(t) := \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$, esiste finito $G(\infty) := \lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$. Quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$ e G é limitata: $\exists M$ tale che $|G(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x\int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\tfrac{s}{x}) e^{-s} ds \to_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

perché $$\int_0^{+\infty} G(\tfrac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds$$ e

$$\left|\int_0^{\delta} [G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds\right| \leq 2M[1 - e^{-\delta}] \qquad \int_\delta^{\infty} |G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon \text{ se } \tfrac{\delta}{x} \geq t_\epsilon.$$