AM210/2014-15: Tracce delle lezioni- Settimana XII

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Spazi metrici completi, spazi di Banach

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X,d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \le \epsilon \quad \forall n, m \ge n_\epsilon$$

(X,d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo, ovvero

$$x_n \in V,\ \|x_n - x_m\| \le \epsilon \text{ per } n, m \text{ grandi} \quad \Rightarrow \quad \exists x \in V : \quad \|x_n - x\| \to_n 0.$$

ESEMPI.
1. Sia (X,d) completo, $C \subset X$. Allora (C,d) é completo $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.
2. $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea, é un Banach.

3. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. $C(K, \mathbf{R}^m)$, con $\quad \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in K} \|f(x)\| \quad$ é un Banach.
Prova. Siccome $f_n \to f$ uniformemente ($f_n = ((f_n)_1, \ldots, (f_n)_m), \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$) se e solo se $(f_n)_i \to f_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ uniformemente, basta provarlo nel caso $n = 1$. Ora, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon : \ n, m \ge n_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$$

Dunque, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in K$ la $n \to f_n(x)$ é di Cauchy $\Rightarrow \quad \forall x \in K,\ \exists$ (finito) $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Poi, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \le \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in K$$

se $n \ge n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \ge n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \ \forall x \in K$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon \ \ \forall x \in K$ e per ogni $n \ge n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f, ovvero $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0$.

4. $E := C([a,b], \mathbf{R}^m)$ munito della norma della convergenza uniforme uniforme $\|\gamma\|_\infty := \max\limits_{[a,b]} \|\gamma(t)\|$ ove $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$ é spazio di Banach (come in 3).

5. $C([a,b], \mathbf{R})$, munito della norma $\quad \|f\|_1 := \int\limits_a^b |f(t)| dt \quad$ non é completo.

Ad esempio $(a = -1, b = 1)$, $\quad \int\limits_{-1}^{1} ||x|^{\frac{1}{n}} signx - signx| dx \to_n 0$ e quindi f_n é di Cauchy in $(C([-1,1], \mathbf{R}), \|.\|_1)$, ma non esiste $g \in C([-1,1], \mathbf{R})$ tale che $\|f_n - g\|_1 \to_n 0$.

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $T(C) \subset C$

(ii) $\exists k \in (0,1) : \quad d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall\, x, y \in C$ (T é una **'contrazione'**)

allora $\qquad \exists! \quad x \in C : \qquad Tx = x$

Unicitá: $Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y.$ Infatti,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0 \quad \text{perché } k \in (0, 1).$$

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $x_{n+1} = Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq kd(x_1, x_0)$$

Ugualmente, $d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{x_{n-1}}) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $\qquad d(x_{n+p+1}, x_n) \leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$$\leq \left[k^{n+p} + \ldots + k^n\right] d(x_1, x_0) \leq k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1, x_0) \ \to_n 0$$

UN ESEMPIO. $\quad f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che $|f'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ é contrazione.

NOTA. La richiesta $k < 1$ in $ii)$ é essenziale. Esempio: sia $c_0 = \{x \in l^\infty : x(n) \to_n 0\}$ (sottospazio chiuso di l^∞), $\quad B := \{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq 1\}$. $(B, \|.\|_\infty)$ é spazio metrico completo. Sia $T : B \to B$ cosí definita: $(Tx)(1) = 1$, $(Tx)(j) = x(j-1)$ se $j \geq 2$. Nota che $\|Tx\|_\infty = 1 \quad \forall x \in B$. Si ha $\|Tx - Ty\|_\infty = \|x - y\|_\infty \quad \forall x, y \in c_0$ ma T non ha punti fissi in B, perché $Tx = x \Rightarrow x(n) = 1\ \forall n$.

PROBLEMA DI CAUCHY
Esistenza e unicitá locale, unicitá globale, soluzione massimale.

Teorema di Picard (locale) *(esistenza/unicitá locale in ipotesi Lip_{loc})*
Dati $t_0 \in \mathbf{R}, x_0 \in \mathbf{R}^n$ ed $r > 0$, siano $\quad I_\rho := [t_0 - \rho, t_0 + \rho], \quad B_r := B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^n$.
Data $\quad f \in C(\overline{B}_{2r} \times I_\rho, \mathbf{R}^n), \quad$ *sia* $\quad M := \sup\limits_{\overline{B}_{2r} \times I_\rho} \|f(x,t)\|$. *Supponiamo che*

$$\exists L > 0 : \qquad \|f(x,t) - f(y,t)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall x, y \in \overline{B}_{2r}, \quad \forall t \in I_\rho$$

Sia $\quad \delta < min\{\rho, \frac{1}{L}, \frac{r}{M}\}$. $\quad$ *Allora:* $\quad$ *per ogni* $x \in B_r$,

$$(i) \quad \exists\,!\,\gamma^x \in C^1(I_\delta, B_{2r}) : \qquad \gamma^x(t_0) = x, \quad \dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t), t) \quad \forall t \in I_\delta$$

$$(ii) \quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_{\infty,\delta} = \sup_{t \in I_\delta} \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \leq \frac{1}{1 - \delta L} \|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r$$

Prova. $\quad C(I_\delta, \mathbf{R}^n)$, munito della norma $\|\gamma\|_{\infty,\delta}$ é un Banach, e quindi

$$X := \{\gamma \in C(I_\delta, \mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma(t) - x_0\| \leq 2r \qquad \forall t \in I_\delta\}$$

é spazio metrico completo (rispetto alla metrica indotta) e, fissato $x \in B_r(x_0)$,

$$se \qquad T^x\gamma : t \to x + \int_{t_0}^t f(\gamma(\tau), \tau) d\tau, \quad t \in I_\delta, \qquad é \qquad T^x\gamma \in C(I_\delta, \mathbf{R}^n)$$

Poi, $\gamma \in X \Rightarrow \|(T^x\gamma)(t) - x_0\| \leq \|x - x_0\| + \left|\int_{t_0}^t \|f(\gamma(\tau), \tau)\| d\tau\right| \leq r + \delta M < 2r$

$\Rightarrow \qquad T^x(X) \subset X. \qquad$ Infine $\qquad \gamma, \beta \in X \quad \Rightarrow \quad \|T^x\gamma - T^x\beta\|_{\infty,\delta} \leq$

$$\sup_{t \in I_\delta} \left|\int_{t_0}^t \|f(\gamma(\tau), \tau) - f(\beta(\tau), \tau)\| d\tau\right| \leq \sup_{t \in I_\delta} \left|\int_{t_0}^t L\|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\| d\tau\right| \leq L\delta\|\gamma - \beta\|_{\infty,\delta}$$

Siccome $\quad \delta L < 1, \quad T^x$ é una contrazione di $\quad X \quad$ in sé e quindi

$$\exists\,!\,\gamma^x \in X : \qquad T^x\gamma^x = \gamma^x. \qquad\qquad \text{Notiamo che} \quad (T\gamma^x)(0) = x.$$

Dunque, γ^x é l'unica soluzione, definita in I_δ , del problema di Cauchy

$$\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in I_\delta, \qquad \gamma^x(0) = x$$

Infine, $\qquad \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \leq \|x - y\| + \sup\limits_{t \in [-\delta, \delta]} \left|\int_{t_0}^t \|f(\gamma^x(\tau)) - f(\gamma^y(\tau))\| d\tau\right| \leq$

$$\|x - y\| + \delta L\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_{\infty,\delta} \leq \frac{1}{1 - \delta L}\|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

Proposizione 1 (unicitá globale)

Sia $f \in C^1(O \times I, \mathbf{R}^n)$, $O \times I$ *aperto in* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. *Siano* $\gamma \in C^1((a,b))$ *e* $\beta \in C^1((\tilde{a},\tilde{b}))$ *soluzioni dello stesso problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t), \qquad x(t_0) = x_0$$

Se $(a,b) \subset (\tilde{a},\tilde{b})$, *allora* $\gamma \equiv \beta$ *in* (a,b): β *é un prolungamento della soluzione* γ.

Prova. Per il Teorema di Picard, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma \equiv \beta$ per $|t - t_0| \leq \delta$.

$$\text{Quindi} \qquad \bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [t_0, t]\} \geq \delta$$

Sia, per assurdo, $\bar{t} < b$; per continuitá é anche $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$. Dunque $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t) \qquad t \in (t_0, b) \qquad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$ per un $\sigma > 0$ piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [0, t]\} \geq \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque $\gamma \equiv \beta$ in $[0, b)$ e, analogamente, $\gamma \equiv \beta$ in $(a, 0]$).

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale é, per via della Prop. 1, unica. Il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).

Se $t^-(x_0) = -\infty$, , diremo che (PC) ha soluzione per tutti i tempi negativi.
Se $t^+(x_0) = +\infty$, , diremo che (PC) ha soluzione per tutti i tempi positivi.
Se $t^-(x_0) = -\infty$, $t^+(x_0) = +\infty$, diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$

mentre il problema $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$, $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione 2 (della prolungabilitá)

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times I, \mathbf{R}^n)$, $\quad \dot\gamma(t) = f(\gamma(t)), \quad t \in [t_0, T)$.

Allora $\qquad M := \sup\limits_{t \in [t_0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \gamma$ é prolungabile oltre T

In particolare, $\sup\limits_{t \in (t^-,t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$ *(ad es. se* γ *é limitata)* $\quad \Rightarrow \quad t^\pm = \pm\infty.$

Prova. É $\quad \|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|\int\limits_s^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \le M|t-s| \quad \forall s,t \in [t_0,T)$ e quindi γ é uniformemente continua in $[0,T)$. Ne deriva che

$$\exists \quad \gamma(T) := \lim_{t \to T^-} \gamma(t) \quad \text{e} \quad \dot\gamma(T) = f(\gamma(T))$$

Detta allora $\hat\gamma$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat\gamma(T) = \gamma(T)$, la funzione uguale a γ in $[0,T)$ ed uguale a $\hat\gamma$ in $[T, T+\delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0, T+\delta]$.

Corollario . *Sia* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *tale che*

(i) $\{x : g(x) \le g(x_0)\}$ é limitato $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \qquad$ *(ii)* $< \nabla g(x), f(x) > \ \le 0 \quad \forall x$

Allora le soluzioni del sistema $\dot x = f(x)$ *sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti,

$$\frac{d}{dt} g(x(t)) \ = < \nabla g(x(t)), \dot x(t) > = < \nabla g(x(t)), f(x(t)) > \ \le \ 0 \quad \forall t$$

e quindi la traiettoria $x(t)$ si mantiene, per tutti i tempi positivi, nella regione limitata $\{g(x) \le g(x_0)\}$ e quindi $t^+ = +\infty$.

Due esempi importanti: Sistemi gradiente, Sistemi Hamiltoniani

Sistemi gradiente (ovvero linee di discesa piú ripida):

$$\dot x = -\nabla F(x) \qquad F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$$

Per applicare il Corollario, basta prendere $g = F$: $\ < \nabla g(x), f(x) > \ = -\|\nabla F\|^2$ e dedurre che se $\{x \in \mathbf{R}^n : \ F(x) \le c\}$ é limitato per ogni $c \in \mathbf{R}$, allora le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si puó dire di piú:

se F *é inferiormente limitata le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti,

$$\int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))'\, d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \le F(x(0)) - \inf F \quad \Rightarrow$$

$$\|x(t) - x(s)\| = \|\int_s^t \dot{x}(\tau)d\tau\| \le \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|d\tau \le |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(F(x(0)) - \inf F\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s < t$$

e quindi $x(t)$ é uniformemente continua. Si conclude come nella dimostrazione della Proposizione 2.

Sistemi Conservativi, Hamiltoniani

Il sistema $\dot{x} = f(x)$ si dice *conservativo* se esiste un *integrale primo* , ovvero una $G \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tale che

$$< \nabla G(x), f(x) > \; = 0 \quad \forall x, \quad \textit{e quindi} \quad \dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} G(x(t)) = 0 \quad \forall t$$

cioé G é costante lungo le traiettorie (G *si conserva durante il moto*). Se le superfici di livello $\{G = cost\}$ sono limitate, le soluzioni del sistema sono definite per tutti i tempi. Un caso importante é dato dai *sistemi Hamiltoniani* a n gradi di libertá:

$$\dot{x} = H_y(x,y), \qquad \dot{y} = -H_x(x,y)$$

ove $H \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $H = H(x,y)$, $x, y \in \mathbf{R}^n$ é *funzione Hamiltoniana, o energia totale*; l'Hamiltoniana é un integrale primo:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = H_x(x(t), y(t))\dot{x} + H_y(x(t), y(t))\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} \equiv 0$$

Una importante classe di sistemi Hamiltoniani é data dai *sistemi Newtoniani conservativi*

$$(*) \qquad \ddot{x} = -\nabla U(x) \qquad x \in C^2(I, \mathbf{R}^n)$$

che descrivono il moto di un corpo sollecitato da un *campo di forze conservativo* $F = -\nabla U$. Posto $p = \dot{x}$, il *sistema del secondo ordine* $(*)$ si riscrive in forma Hamiltoniana, con *energia totale (=cinetica+potenziale)* $H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + U(x)$. Se $n = 1$, le traiettorie nel *piano delle fasi* (x, p) hanno equazione (cartesiana)

$$p = \pm\sqrt{2(c - U(x))}, \qquad c = H(x_0, p_0) \quad (x_0, p_0) \in \mathbf{R}^2$$

DISEGUAGLIANZA DI GRONWALL

Sia $0 \leq \varphi \in C([0,T), \mathbf{R})$. $\exists A_i > 0 : \quad \varphi(t) \leq A_0 + A_1 t + A_2 \int\limits_0^t \varphi(\tau) d\tau \qquad \forall t \in [0,T)$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(t) \leq (A_0 + A_1 A_2^{-1}) e^{A_2 t} - A_1 A_2^{-1} \quad \forall t \in [0,T)$$

Prova. $\varphi(t) \leq \psi(t) := A_0 + A_1 t + A_2 \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \qquad \psi'(t) = A_1 + A_2 \varphi(t) \leq$

$$\leq A_1 + A_2 \psi(t) \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-A_2 t} \psi(t)\right)' = e^{-A_2 t} \left(\psi'(t) - A_2 \psi(t)\right) \leq A_1 e^{-A_2 t} \quad \overset{integrando}{\Longrightarrow}$$

$$e^{-A_2 t} \varphi(t) \ \leq \ e^{-A_2 t} \psi(t) \ \leq \psi(0) + \int_0^t A_1 e^{-A_2 \tau} d\tau = A_0 - A_2^{-1} A_1 e^{-A_2 t} + A_2^{-1} A_1$$

Problema di Cauchy: esistenza globale. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$. *Se*

$$\forall T, \exists A_1(T), A_2(T) > 0 : \qquad \|f(x,t)\| \leq A_1(T) + A_2(T) \|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n, |t| \leq T$$

allora le soluzioni di $\quad \dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad$ *sono definite globalmente.*
Prova. Sia $\gamma'(t) = f(\gamma(t)) \quad t \in (t^-, t^+)$ (soluzione massimale). Allora, $\forall T < t^+$,

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \leq \|\gamma(t_0)\| + A_1 t + A_2 \int\limits_{t_0}^{t} \|\gamma(\tau)\| d\tau \quad \forall t \leq T \quad \overset{Gronwall}{\Longrightarrow}$$

$\|\gamma(t)\| \leq (\|\gamma(t_0)\| + A_1 A_2^{-1}) e^{A_2 t} - A_1 A_2^{-1}, \quad \forall t \leq T \quad \overset{Prop.\,2}{\Longrightarrow} t^+ = +\infty$. E cosí pure $t^- = -\infty$.

Problema di Cauchy: dipendenza continua dai dati iniziali

Sia $f \in Lip_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *e* $\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in [0,T], \quad \gamma^x(0) = x$. *Sia* $R := \sup\limits_{t \in [0,T]} \|\gamma^x(t) - x\|$. *Esiste* $L > 0$ *tale che, se* $\|x - y\| \leq R e^{-LT}$, *allora*

$$t^+(\gamma^y) > T \quad e \quad \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \leq \|x - y\| \, e^{Lt} \quad \forall t \in [0,T]$$

Prova. Ricordiamo che se $\exists L > 0 : \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$ e $\dot{\beta}(t) = f(\beta(t)), \quad \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ allora $\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| e^{Lt} \quad \forall t \geq 0$. Dunque, se $\varphi \in C_0^\infty(B_{3R}(x))$, $\varphi \equiv 1$ in $B_{2R}(x)$, la $\widetilde{f} := \varphi f$ é Lipschitziana di costante, diciamo, L e $\widetilde{\gamma^y}$, soluzione del problema di Cauchy $\dot{\eta} = \widetilde{f}(\eta), \eta(0) = y$, é definita per tutti i tempi e $\|\widetilde{\gamma^y}(t) - \widetilde{\gamma^x}(t)\| \leq \|y - x\| e^{LT}$. Notiamo che $f \equiv \widetilde{f}$ in $B_{2R}(x)$, $\gamma^x([0,T]) \subset B_R(x) \quad \Rightarrow \quad \gamma^x \equiv \widetilde{\gamma^x}$ in $[0,T]$ e quindi

$$\|x - y\| \leq R e^{-Lt} \quad \Rightarrow \quad \|\widetilde{\gamma^y}(t)\| \leq \|\widetilde{\gamma^y}(t) - \widetilde{\gamma^x}(t)\| + \|\widetilde{\gamma^x}(t)\| \leq \|y - x\| e^{LT} + R \leq 2R$$

$\forall\, t \in [0,T]$ e quindi $\widetilde{f}(\widetilde{\gamma^y}(t)) = f(\widetilde{\gamma^y}(t))$ e quindi $\gamma^y \equiv \widetilde{\gamma^y}$ in $[0,T]$. Di qui la tesi.

STABILITÁ/INSTABILITÁ DI UN EQUILIBRIO

Data $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto, sia

$$\dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t)) \qquad in \quad (t^-(x), t^+(x)), \qquad \gamma^x(0) = x \qquad (PC)$$

La $\varphi_t(x) = \varphi(x,t) := \gamma^x(t)$, $x \in O$, $t \in (t^-(x), t^+(x))$ si chiama **flusso generato dal campo** f: $\forall x \in O$, $t \to \varphi_t(x) = \gamma^x(t)$ é la traiettoria passante per x al tempo $t = 0$. Se $t^\pm(x) = \pm\infty$ $\forall x \in O$, la $x \to \varphi_t(x)$ é una famiglia di omeomorfismi di O in sé dipendente (in modo continuo) dal 'parametro' t. Infatti $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. É questo un caso particolare della seguente proprietá (*di gruppo*) della famiglia di omeomorfismi φ_t :

$$\varphi_t \circ \varphi_\tau = \varphi_{t+\tau}$$

Ció segue dalla unicitá della soluzione del Problema di Cauchy. Infatti, $\varphi_t(\varphi_\tau(x))$ é la soluzione, al tempo t, passante per $\varphi_\tau(x) = \gamma^x(\tau)$ al tempo $t = 0$. Ma, detta $\tilde\gamma(t) := \gamma^x(t+\tau)$, si ha

$$\dot{\tilde\gamma}(t) = \dot\gamma^x(t+\tau) = f(\gamma^x(t+\tau)) = f(\tilde\gamma(t)), \quad \tilde\gamma^x(0) = \gamma^x(\tau)$$

cioé, anche $\tilde\gamma$ é soluzione del problema di Cauchy passante per $\gamma^x(\tau)$ al tempo $t = 0$. Quindi, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy,

$$\varphi_t(\varphi_\tau(x)) = \tilde\gamma(t) = \gamma^x(t+\tau) = \varphi_{t+\tau}(x)$$

Equilibri di un sistema dinamico.

Se $f(\overline{x}) = 0$, allora $x(t) = \overline{x}$ $\forall t \in \mathbf{R}$ é (l'unica) soluzione del sistema differenziale (o dinamico)

$$\dot x(t) = f(x(t)) \qquad (*)$$

ovvero $\varphi_t(\overline{x}) = \overline{x}$ per ogni t. Tale $\overline{x}$ si dice **equilibrio** per $(*)$. Si dice che

- $\overline{x}$ **é equilibrio stabile** se per ogni $B_R(\overline{x}) \subset O$, $\exists r \leq R$ tale che

$$x' = f(x), \quad x(0) \in B_r(\overline{x}) \quad \Rightarrow \quad t^+(\overline{x}) = +\infty \quad e \quad x(t) \in B_R(\overline{x}) \quad \forall t \geq 0$$

-x_0 **é equilibrio asintoticamente stabile** se esiste $B_r \subset O$ tale che

$$x' = f(x), \quad x(0) \in B_r(x_0) \quad \Rightarrow \quad t^+(x_0) = +\infty \quad e \quad x(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$$

Comportamento asintotico del flusso lineare $t \to e^{t\mathcal{A}}x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Dalla espressione esplicita delle soluzioni, vediamo che se gli autovalori λ_j di $\mathcal{A}$, $\alpha_j \pm i\beta_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, p \quad \mu_j \in \mathbf{R}$, $j = 2p+1, \ldots, q$, sono tutti semplici, allora

$$e^{t\mathcal{A}}x_0 \to_{t\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Re e\, \lambda_j < 0 \quad \forall j$$

Diamo una dimostrazione di questo fatto, ancora basata sulla semplicitá degli autovalori, ovvero sul fatto che $\mathcal{A}$ abbia (vedi sopra) una base $\quad (\xi^1, \eta^1, \ldots, \xi^p, \eta^p, u^1, \ldots u^q)$ di 'autovettori'. Partiremo dal fatto ben noto che, se f_j é base in $\mathbf{R}^n$, allora

$$\left\langle \sum_i x_i f_i, \sum_j y_j f_j \right\rangle := \sum_j x_j y_j \qquad \text{é un prodotto scalare su } \mathbf{R}^n \text{con norma associata}$$

$|\sum_i x_i f_i|^2 := \sum_i x_i^2$. Sia ora $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare associato agli 'autovettori' di $\mathcal{A}$. Siccome $\mathcal{A}\xi^j = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j, \qquad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j$ si ha

$$\left\langle \mathcal{A}\xi^j, \xi^j \right\rangle = \alpha_j, \quad \left\langle \mathcal{A}\xi^j, \eta^j \right\rangle = -\beta_j, \quad \left\langle \mathcal{A}\eta^j, \xi^j \right\rangle = \beta_j, \quad \left\langle \mathcal{A}\eta^j, \eta^j \right\rangle = \alpha_j$$

e quindi $\left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^p x'_j \xi^j + x''_j \eta^j + \sum_{i=2p+1}^n x_j u^j\right), \sum_{i=1}^p x'_j \xi^j + x''_j \eta^j + \sum_{i=2p+1}^n x_j u^j \right\rangle =$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_j (x_j'^2 + x_j''^2) - \sum_{i=1}^p \beta_j x'_j x''_j + \sum_{i=1}^p \beta_j x'_j x''_j + \sum_{i=2p+1}^n \mu_j x_j^2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}x, x \rangle \le \max_j \Re e \lambda_j |x|^2$$

Ma allora, se $\dot{x} = \mathcal{A}x$, posto $\varphi(t) := \frac{1}{2}|x(t)|^2$, risulta $\varphi'(t) = \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle =$ $= \langle \mathcal{A}x(t), x(t) \rangle \le -\frac{1}{2}\delta |x(t)|^2 = -\delta\varphi(t)$ e quindi

$$(\log \varphi(t))' \le -\delta \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{2}|x(t)|^2 \le \varphi(t) \le \varphi(0)e^{-\delta t}$$

Lemma Sia $\mathcal{A}$ matrice reale $n \times n$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ i suoi autovalori. Esiste un prodotto scalare in $\mathbf{R}^n \quad \langle \ldots, \ldots \rangle$ tale che

$$min_j \ \alpha_j \le \langle Lx, x \rangle \le \ max_j \ \alpha_j \, \langle x, x \rangle \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Tale Lemma assicura, come sopra, che se gli autovalori di $\mathcal{A}$ hanno tutti parte reale negativa allora lo zero é **equilibrio asintoticamente stabile** per il sistema $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Teorema Sia $\mathcal{A}$ matrice $n \times n$. Se ogni autovalore di $\mathcal{A}$ ha parte reale negativa allora ogni soluzione del sistema $\dot{x} = \mathcal{A}x$ tende esponenzialmente a zero al tendere di t a piú infinito.

Stabilitá nei sistemi gradiente *Sia $F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Sia x_0 punto di minimo locale stretto per F. Allora il sistema*

$$\dot{x} = -\nabla F(x)$$

ha in x_0 un equilibrio stabile. Se, di piú, x_0 é punto critico isolato di F, allora x_0 é asintoticamente stabile.

Prova. Cominciamo con la stabilitá. Sia intanto

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall\, x \in B_R(x_0),\ x \neq x_0, \qquad e \qquad m := \inf_{\|x - x_0\| = R} f(x)$$

$$r < R \quad \text{tale che} \qquad \|x - x_0\| \leq r \quad \Rightarrow \quad f(x) < m$$

La traiettoria passante al tempo $t = 0$ per $x \in B_r(x_0)$ non puó attraversare mai la frontiera di $B_R(x_0)$, perché F dovrebbe 'salire', lungo la traiettoria, da un valore minore di m ad un valore maggiore od uguale a m, mentre invece F decresce lungo le traiettorie. Non potendo uscire da $B_R(x_0)$ tale soluzione é in particolare definita per tutti i tempi positivi.
Mostriamo ora la stabilitá asintotica. Possiamo supporre che x_0 sia l'unico zero di ∇F in $B_R(x_0)$. Sia $x \in B_r(x_0)$, γ^x la traiettoria uscente da x. Per quanto visto, $t^+(x) = +\infty$. Basterá provare che

$$\exists t_j \to +\infty : \qquad \gamma^x(t_j) \to_j x_0$$

perché allora

$$F(x_0) = \lim_{j \to +\infty} F(\gamma^x(t_j)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} F(\gamma^x(t)) = F(x_0)$$

e quindi, necessariamente,

$$x_0 = \lim_j \gamma^x(t'_j) \quad \text{quale che sia} \quad t'_j \to +\infty \qquad (*)$$

perché, se $\gamma^x(t'_{j_k}) \to_k x'$ per una sottosuccessione t'_{j_k} e un $x' \in B_R(x_0)$ si ha $F(x') = \lim_{k \to +\infty} F(\gamma^x(t'_{j_k})) = \lim_{t \to +\infty} F(\gamma^x(t)) = F(x_0)$ e quindi $x' = x_0$ e quindi $(*)$.
Ora, l'esistenza di $t_j \to +\infty$ tale che $\|\nabla F(\gamma^x(t_j)\| \to_j 0$ segue da

$$\int_0^t \|\nabla F(\gamma^x(\tau))\|^2 \, d\tau \leq F(x(0)) - \inf F \qquad \forall t \geq 0$$

ed allora, per almeno una sottosuccessione t_{j_k} e un $x_1 \in B_R(x_0)$, $\gamma^x(t'_{j_k}) \to_k x_1$ con $\nabla F(x_1) = \lim_{k \to \infty} \|\nabla F(\gamma^x(t'_{j_k})\| = 0$ e quindi $x_1 = x_0$.

Il Teorema di stabilitá di Lyapunov

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. *Sia* $f(\overline{x}) = 0$.
Supponiamo esista una $g \in C(B_r(\overline{x}) \cap C^1(B_r(\overline{x}) \setminus \overline{x})$ *funzione di Lyapunov, cioé tale che*

(i) $g(x) > g(\overline{x}) \quad \forall x \in B_r(\overline{x}) \setminus \overline{x}$ *(cioé* $\overline{x}$ *é minimo locale stretto per* g*)*

(ii) $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in B_r(\overline{x}) \setminus \overline{x}$

Allora $\overline{x}$ *é equilibrio stabile per il sistema* $\dot{x} = f(x)$.
Se, di piú, in (ii) vale la diseguaglianza stretta, allora tale equilibrio é asintoticamente stabile.

Prova. Sia $m := \inf_{\{\|x - x_0\| = r\}} g$. Dalle ipotesi segue che $m > g(\overline{x})$.
Sia $\rho < r$ tale che $g(x) \leq \tilde{m} := \frac{m + g(\overline{x})}{2} \quad \forall x \in B_\rho(\overline{x})$ e sia

$$\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)), \quad \gamma^x(0) = x \in B_\rho(\overline{x})$$

Siccome $\gamma^x(t) \in B_r(\overline{x})$ per tempi piccoli, é definito

$$T =: \sup\{t > 0 : \|\gamma^x(\tau) - \overline{x}\| < r \quad \forall \tau \leq t\}$$

Se T é finito, γ^x é definita in T e, per continuitá, $\|\gamma^x(T) - \overline{x}\| = r$ e quindi $g(\gamma^x(T) \geq m > \tilde{m}$ e questo é impossibile perché

$$\gamma^x(t) \in B_r(\overline{x}) \quad \forall t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad g(\gamma^x(t)) \quad \text{é decrescente in} \quad [0.T]$$

e quindi $g(\gamma^x(T)) \leq g(x) \leq \tilde{m}$. Dunque $T = +\infty$, ovvero $\overline{x}$ é stabile.
Proviamo ora che se vale la diseguaglianza stretta in (ii) allora

$$x \in B_\rho \quad \Rightarrow \quad \gamma^x(t) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

(possiamo supporre, senza perdere in generalitá, che $\overline{x} = 0$ e $g(0) = 0$). Sia $\varphi_t(x) = \gamma^x(t)$ il flusso generato dal campo f. Basta provare che

$$x_n := \varphi_{t_n}(x) = \gamma^x(t_n) \overset{t_n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

Osserviamo innanzi tutto che, siccome g decresce strettamente lungo le traiettorie, é $g(\gamma^x(t_n)) > g(x_0)$.
Supponiamo poi, per assurdo, che $x_0 \neq 0$. Siccome zero é l'unico equilibrio in B_r,

perché $\langle \nabla g(x), f(x)\rangle < 0 \quad \forall x \in B_r \setminus 0$, e giacché g decresce strettamente lungo le traiettorie, si ha che

$$g(\gamma^{x_0}(t)) < g(x_0) \quad \forall t > 0$$

Fissato $t_0 > 0$, per la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale, si ha che

$$\gamma^{x_n} \to_n \gamma^{x_0} \quad in \quad [0, t_0] \quad \text{e quindi} \quad g(\gamma^{x_n}(t_0)) \to g(\gamma^{x_0}(t_0)) < g(x_0)$$

Ma

$$x_n = \varphi_{t_n}(x) = \gamma^x(t_n) \quad \Rightarrow \quad \gamma^x(t_n + t_0) = \varphi_{t_n+t_0}(x) = \varphi_{t_0}(\varphi_{t_n}(x)) = \gamma^{x_n}(t_0)$$

e quindi

$$g(x_0) = \lim_n g(\gamma^x(t_n + t_0)) = \lim_n g(\gamma^{x_n}(t_0)) = g(\gamma^{x_0}(t_0)) < g(x_0)$$

Corollario: in un campo di forze conservativo i minimi locali stretti dell'energia potenziale sono equilibri stabili
In un campo di forze conservativo $\quad F = -\nabla V, \quad V \in C^2(\mathbf{R}^3) \quad$ la dinamica é regolata dalla legge

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)) = -\nabla U(x(t)) \qquad ovvero \qquad \dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -\nabla U$$

L'energia totale (o Hamiltoniana) é data da $\qquad H(x,p) = \frac{1}{2}p^2 + U(x)$

Gli equilibri del sistema, ovvero i punti critici dell'Hamiltoniana, sono $\quad (x, 0)$ ove $\nabla U(x) = 0$; ad esempio x punto di minimo locale per U.
Supponiamo che $x = 0$ sia un minimo (locale stretto) per l'energia potenziale U.
Allora H é funzione di Lyapunov per l'equilibrio $(0, 0)$, perché $(0, 0)$ é minimo locale stretto per H, che é costante lungo le traiettorie.
Dunque $(0, 0)$ é equilibrio stabile.

Stabilitá lineare. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),\ f(0) = 0$.
Se gli autovalori di $df(0)$ *hanno tutti parte reale negativa lo zero é equilibrio asintoticamente stabile per il sistema* $\quad \dot{x} = f(x)$.
Prova. Come visto, esiste un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tale che $\langle df(0)x, x\rangle \le -\delta |x|^2$, ove $|x|^2 := \langle x, x\rangle$. Dalla differenziabilitá di f segue che

$$\langle f(x), x\rangle = \langle df(0)x + \circ(x), x\rangle \le -\frac{\delta}{2}|x|^2 \qquad per \quad x \quad piccolo$$

Dunque $g(x) := |x|^2$ é funzione di Lyapunov in zero, perché $\quad g(x) > g(0) = 0 \forall x \ne 0$

$$e \qquad \nabla g(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla g(x), df(x)\rangle = 2\,\langle \nabla g(x), df(x)\rangle < 0 \quad se \quad 0 < |x| << 1$$

COMPLEMENTI

ESEMPI

Esempio 1. Le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3y^2 \\ \dot{y} &= -2y^3x^2 \end{aligned}$$

sono definite per tutti i tempi positivi: basta prendere $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ per ottenere

$$\frac{d}{dt}g(x(t),y(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{x^2+y^2}{2}) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4y^2 - 2y^4x^2 \leq 0 \qquad \forall t$$

Invece, $t^- > -\infty$ quale che sia la condizione iniziale. Questo si puó vedere cosi':

$$\frac{d}{dt}[x(t)^2y(t)^2] = 2xy^2\dot{x} + 2yx^2\dot{y} = -2xy^2(x^3y^2) - 2yx^2(2y^3x^2) = -6(x^2y^2)^2$$

cioé $\quad z(t) := x(t)^2y(t)^2 \quad$ risolve $\quad \dot{z} = -6z^2 \quad$ e quindi

$$z(t) = \frac{z(0)}{1+6z(0)t} \qquad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$$

Siccome $\quad z(0) = x(0)^2y(0)^2 \quad$ e

$$\dot{x} = -x(x^2y^2) = -x\frac{z(0)}{1+6z(0)t} \qquad\qquad \dot{y} = -2y(x^2y^2) = -2y\frac{z(0)}{1+6z(0)t}$$

troviamo $\quad \log\frac{x(t)}{x(0)} = -\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \qquad \log\frac{y(t)}{y(0)} = -2\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \quad$ ovvero

$$x(t) = \frac{x(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{6}}} \qquad y(t) = \frac{y(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{3}}} \qquad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$$

Notiamo anche che

$$\frac{\dot{y}}{y} = -2x^2y^2 = 2\frac{\dot{x}}{x} \quad \Rightarrow \quad \log\frac{y(t)}{y(0)} = 2\log\frac{x(t)}{x(0)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{y(0)}{x(0)^2}x(t)^2$$

Esempio 2. Le soluzioni di

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy^2(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= -yx^4(x^2+y^2) \end{aligned}$$

sono definite $\forall t$:

$$\frac{d}{dt}(\frac{x^4}{2} + y^2) = 2x^3\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^4y^2(x^2+y^2) - 2y^2x^4(x^2+y^2) \equiv 0$$

e quindi $\quad$ *g é costante lungo le traiettorie,* $\quad$ ovvero le traiettorie sono contenute negli insiemi di livello di g, che sono visibilmente limitati.