

Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2014/2015
ST410 — Statistica 1

Lezione 1 - Martedì 23 Settembre 2014

Introduzione al corso.

Richiami di probabilità: spazi di probabilità, variabili aleatorie, funzioni di ripartizione, densità di probabilità (caso discreto e caso continuo). Media e varianza. Esempi.

Momenti assoluti e momenti centrali; funzione generatrice dei momenti; variabili aleatorie con stessa funzione generatrice dei momenti sono identicamente distribuite (senza dimostrazione); esempio del calcolo della f.g.m., della media e della varianza di una v.a. esponenziale.

Lezione 2 - Giovedì 25 Settembre 2014

Funzione di ripartizione congiunta, densità congiunta (caso discreto e caso continuo), densità marginali. Esempi.

Richiami sulla probabilità condizionata; definizione di densità condizionata e sue proprietà. Valore atteso condizionato.

Lezione 3 - Martedì 30 Settembre 2014

Variabili aleatorie indipendenti: definizioni equivalenti e proprietà; indipendenza e densità condizionata; media del prodotto di variabili aleatorie indipendenti; f.g.m. della somma di variabili aleatorie indipendenti.

Distribuzione della somma di variabili aleatorie normali e indipendenti con il metodo dei momenti.

Densità congiunta di un vettore casuale a seguito di una trasformazione biiettiva.

Applicazioni: distribuzione della somma di variabili aleatorie normali $N(0, 1)$ e indipendenti; date due variabili aleatorie normali e indipendenti con stessa varianza, la loro somma e la loro differenza sono tra loro indipendenti.

Esercizi su densità congiunta, densità condizionata e media condizionata di variabili aleatorie discrete.

Lezione 4 - Giovedì 2 Ottobre 2014

Funzione generatrice dei momenti congiunta.

Covarianza e correlazione. Relazione tra indipendenza e incorrelazione. Coefficiente di correlazione e sue proprietà.

Esercizi su distribuzione condizionata e media condizionata per variabili aleatorie continue. Esercizi su funzione generatrice dei momenti e distribuzione condizionata.

Estensione del teorema di cambio di variabile per densità congiunta di un vettore aleatorio. Esercizi ed applicazioni: il rapporto di due normali standardizzate e indipendenti si distribuisce come una Cauchy.

Lezione 5 - Martedì 7 Ottobre 2014

Campioni casuali di data ampiezza da una popolazione con una certa densità: definizione, osservazioni ed esempi.

Statistiche; media campionaria, varianza campionaria, momenti (assoluti e centrali) campionari. Generalità sulla media e varianza della media campionaria e sulla media della varianza campionaria.

Distribuzione della somma di variabili aleatorie indipendenti; distribuzione della media campionaria nel caso di un campione casuale estratto da una popolazione normale.

La legge debole dei grandi numeri: dimostrazione attraverso la disuguaglianza di Chebyshev. Applicazioni all'inferenza statistica.

Lezione 6 - Giovedì 9 Ottobre 2014

Teorema del limite centrale (senza dimostrazione) e applicazioni.

La media campionaria nel caso della distribuzione Bernoulliana e di Poisson.

Funzione gamma e principali proprietà; distribuzione gamma: espressione analitica, funzione generatrice dei momenti, media e varianza.

Distribuzione chi quadrato con k gradi di libertà. Esempi di v.a. con distribuzione chi quadro.

Lezione 7 - Martedì 14 Ottobre 2014

La media campionaria e la varianza campionaria di una popolazione normale sono statistiche indipendenti; distribuzione della varianza campionaria di una popolazione normale.

La distribuzione t di Student: motivazioni, formula esplicita della densità, calcolo della media.

La distribuzione F di Fisher: definizione.

Lezione 8 - Giovedì 16 Ottobre 2014

Ancora sulla distribuzione F di Fisher: il rapporto tra le varianze campionarie di due campioni indipendenti estratti da distribuzioni normali di stessa varianza si distribuisce come una F (con determinati gradi di libertà); media della distribuzione F ; varianza di una t di Student; il reciproco del quantile p -esimo della distribuzione $F_{n,m}$ è pari al quantile $(1-p)$ -esimo della distribuzione $F_{m,n}$. Esercizi sulla distribuzione chi-quadro, t di Student e F di Fisher; il quadrato del minimo di due normali standardizzate ed indipendenti si distribuisce come una chi-quadro con un grado di libertà.

Lezione 9 - Martedì 21 Ottobre 2014

Statistiche e partizioni dello spazio campionario; statistiche sufficienti: definizione, esempi e proprietà nel caso discreto e nel caso continuo.

Il principio di sufficienza.

Il teorema di fattorizzazione di Neyman-Fisher (con dimostrazione nel solo caso discreto).

Lezione 10 - Giovedì 23 Ottobre 2014

Esempi di applicazione del teorema di fattorizzazione: statistiche sufficienti nel caso del campionamento da una normale di media e varianza incognite. Trasformazioni biunivoche di statistiche sufficienti sono esse stesse statistiche sufficienti.

Statistiche sufficienti minimali; il principio di sufficienza minimale di Lehmann-Scheffé; esempi.

Funzione di verosimiglianza. Il principio di verosimiglianza debole. Il principio di verosimiglianza debole e il principio di sufficienza sono equivalenti.

Lezione 11 - Martedì 28 Ottobre 2014

Stimatori; metodi per la ricerca di estimatori: il metodo dei momenti, il metodo della massima verosimiglianza. Esempi.

Proprietà di invarianza per gli estimatori di massima verosimiglianza.

Lezione 12 - Giovedì 30 Ottobre 2014

Proprietà di invarianza per gli estimatori di massima verosimiglianza: definizione di verosimiglianza indotta, dimostrazione della proprietà.

Esercizi riepilogativi di preparazione all'esonero: funzione generatrice dei momenti; distribuzione condizionata e media condizionata; covarianza; distribuzione chi quadro, t e F; statistiche sufficienti, statistiche sufficienti minimali; estimatori di massima verosimiglianza e calcolati tramite il metodo dei momenti.

Lezione 13 - Giovedì 13 Novembre 2014

Primo esonero.

Lezione 14 - Martedì 18 Novembre 2014

Distorsione di uno stimatore; estimatori non distorti. Errore quadratico medio; errore quadratico medio per estimatori non distorti. Esempi.

Stimatori UMVUE. Teorema di Cramer–Rao: ipotesi di regolarità e dimostrazione. Stimatori efficienti.

Lezione 15 - Giovedì 20 Novembre 2014

Semplificazioni nel calcolo del limite inferiore di Cramer–Rao.

Unicità degli estimatori UMVUE.

Esempi: utilizzare il teorema di Cramer–Rao per la ricerca di estimatori UMVUE; casi in cui il teorema non si può applicare.

Statistiche complete. Statistiche complete e sufficienti sono minimali.

Lezione 16 - Martedì 25 Novembre 2014

Esempio di statistica completa e non completa.

Richiami sulla media condizionata; teorema di Rao-Blackwell sull'uniforme miglioramento di estimatori non distorti tramite condizionamento rispetto a statistiche sufficienti (con dimostrazione).

Il teorema di Lehmann–Scheffé sull'esistenza di estimatori UMVUE (con dimostrazione).

Esempi: trovare estimatori UMVUE tramite statistiche sufficienti e complete; in alcuni problemi di stima non esiste alcun stimatore non distorto per certe funzioni del parametro incognito; in alcuni problemi di stima esistono estimatori non distorti del parametro ma nessun UMVUE.

Lezione 17 - Giovedì 27 Novembre 2014

La media campionaria di un campione estratto da una normale di media incognita e varianza nota è una statistica sufficiente minimale e completa.

Proprietà asintotiche di successioni di stimatori: stimatori consistenti e consistenti in media quadratica. La consistenza in media quadratica implica la consistenza. Una successione di stimatori è consistente in media quadratica se e solo se la distorsione e la varianza tendono a zero. Esempi.

Introduzione alla stima per intervalli.

Definizione di intervalli di confidenza e di livello di confidenza. Il metodo della quantità pivotale per determinare intervalli di confidenza.

Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale, supponendo nota la varianza. Esempi.

Lezione 18 - Martedì 2 Dicembre 2014

Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale, supponendo la varianza incognita; intervallo di confidenza per la varianza di una popolazione normale, supponendo nota la media; intervallo di confidenza per la varianza di una popolazione normale, supponendo la media incognita. Esempi.

Regione di confidenza simultanea per media e varianza di una popolazione normale.

Lezione 19 - Giovedì 4 Dicembre 2014

Intervallo di confidenza per la differenza tra medie di due popolazioni normali, nel caso di varianze note oppure nel caso di varianze incognite ma uguali. Esempi.

Introduzione alla verifica di ipotesi statistiche.

Definizione di ipotesi statistica e di test statistico.

Regione critica di un test. Errore di primo e secondo tipo. Funzione di potenza di un test. Ampiezza di un test. Esempi.

Lezione 20 - Venerdì 5 Dicembre 2014

Rapporto di verosimiglianza semplice e relativo test d'ipotesi. Esempi.

Rapporto di verosimiglianza generalizzato e relativo test d'ipotesi. Esempi.

Utilizzo di statistiche sufficienti per determinare il rapporto di verosimiglianza.

Test uniformemente più potenti; lemma di Neymann-Pearson per ipotesi semplici (con dimostrazione).

Lezione 21 - Martedì 9 Dicembre 2014

Esempi sull'applicazione del lemma di Neymann-Pearson per individuare test più potenti (caso continuo e caso discreto).

Famiglie di densità con rapporto di verosimiglianza monotono.

Teorema di Karlin-Rubin (con dimostrazione) per la costruzione di test uniformemente più potenti per ipotesi unilaterali, utilizzando statistiche sufficienti con rapporto di verosimiglianza monotono (non decrescente o non crescente).

Esempi.

Lezione 22 - Giovedì 11 Dicembre 2014

Test di ipotesi relativi alla media di una popolazione normale: test unilaterale con varianza nota, test bilaterale con varianza nota, test unilaterale con varianza incognita, test bilaterale con varianza incognita. Esempi.

Il valore p dei dati (p-value).

Lezione 23 - Martedì 16 Dicembre 2014

Test di ipotesi relativi alla varianza di una popolazione normale: test bilaterale con media nota, test bilaterale con media incognita. Esempi.

Test di confronto tra medie (in caso di varianze incognite ma uguali); test di confronto tra varianze. Esempi.

Esercizi: test di ipotesi nel caso di una distribuzione di Poisson.

Lezione 24 - Giovedì 18 Dicembre 2014

Il modello di regressione lineare semplice: ipotesi del modello, stimatori dei minimi quadrati. Gli stimatori dei minimi quadrati sono non distorti.

Ipotesi aggiuntive sul modello: conseguenze sugli stimatori dei minimi quadrati (senza dimostrazione), intervalli di confidenza e test di ipotesi per la pendenza (caso bilaterale e unilaterale).

Esempi: la regressione alla media di Galton.