Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laura Special

Dip. Matematica - Università Roma Tre

Prof. U. Bessi, S. Gabelli, G. Gentile, M. Pontecorvo

22 giugno 2005

Istruzioni.
a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti;
b) il punteggio massimo è 100;
c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti;
d) evitare di consegnare sullo stesso foglio esercizi di gruppi diversi.
NON PARLARE pena il ritiro del compito.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (15 punti.)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

1) Determinare il dominio di f e dire se f è pari o dispari.

2) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

3) Dimostrare che f si può estendere con continuità a una funzione $\tilde{f}$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

4) Dimostrare che $\tilde{f}$ è Lipschitz.

1.2 (15 punti.)

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(1+x^2)^3}.$$

Potrebbe essere utile applicare ripetutamene la sostituzione $1 = (1+x^2) - x^2$.

1.3 (15 punti.)

Studiare la funzione

$$f(x) = (x \log x - x)^2.$$

Determinare in particolare il dominio di definizione, i limiti, gli eventuali punti di massimo o di minimo. Determinare quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{2}.$$

1.4 (15 punti.)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x\,(2y - |x|^3 - 1)\,, \\ \dot{y} = -\,(y - 4x^2|x|)\,(y - 1)\,. \end{cases}$$

(i) Trovare una funzione $H(x, y)$ che sia una costante del moto, e discuterne la regolarità.

(ii) Trovare i punti d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

(iii) Studiare qualitativamente il sistema.

(iv) Determinare l'insieme dei dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.

1.5 (25 punti.)

Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ sia

$$f_n(x) = \frac{x}{n + x^2}$$

e si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x).$$

1) Determinare l'insieme dove la serie converge assolutamente.

2) Dimostrare che la serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.

3) Dimostrare che la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

1.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.

Il criterio di Leibnitz per le serie numeriche, con la relativa stima del resto.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (15 punti.)

In accordo con il teorema spettrale ridurre a forma diagonale tramite matrici ortogonali la seguente matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

2.2 (15 punti.)

Sia $\mathcal{C} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Dimostrare che $\mathcal{C}$ non ha dimensione finita e che

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg\, dx$$

definisce un prodotto scalare su $\mathcal{C}$.

2.3 (15 punti.)

Dimostrare che - *in dimensione 2* - il determinante

$$\begin{array}{rccl} \det : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}$$

è una forma bilineare antisimmetrica. Scrivere la sua matrice associata (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$).

2.4 (15 punti.)

Sia $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ l'anello degli interi di Gauss.

Mostrare che l'anello quoziente

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}$$

è un campo finito di caratteristica 2 e determinarne il numero di elementi.

2.5 (25 punti.)

L'identificazione standard della retta complessa $\mathbb{C}$ con il piano reale $\mathbb{R}^2$ data da

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z = x + iy & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

induce un'applicazione

$$\psi : \mathbb{C}^* \to GL(2, \mathbb{R})$$

tra il gruppo dei numeri complessi non-nulli $\mathbb{C}^* = \{0 \neq \alpha = a + ib \in \mathbb{C}\}$ e il gruppo di matrici invertibili $GL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) | detA \neq 0\}$ dato dalla seguente formula:

$$\phi(\alpha \cdot z) = \psi(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dopo aver calcolato esplicitamente la matrice $\psi(a + ib) \in GL(2, \mathbb{R})$ mostrare che:

1. $\psi : \mathbb{C}^* \to GL(2, \mathbb{R})$ è un morfismo di gruppi.
2. ψ è iniettivo ma non suriettivo.

2.6 (25 punti.) Dissertazione teorica. Enunciare e dimostrare la formula di Grassmann vettoriale e proiettiva.

Soluzioni PFB del 22 giugno 2005

1 Gruppo I (Analisi)

1.1 (15 punti)

1. Se $x = 0$ la funzione é nulla, se $x \neq 0$ allora l'integrale é definito su una funzione priva di punti di discontinuitá nell'intervallo $(x, 2x)$ ed é quindi definito. Il dominio é quindi $\mathbb{R}$.

   La funzione é pari poiché, considerando $f(-x)$ e facendo il cambio di variabili $t = -k$ otteniamo l'integrale

   $$-\int_x^{2x} -\frac{\sin k}{k^2} dk$$

   che é uguale ad $f(x)$.

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

   Per trovare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ calcoliamo l'integrale per parti fino ad ottenere una cosa facilmente controllabile in 0:

   $$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt = -\frac{\sin t}{t}|_x^{2x} (\stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0) + \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \approx$$

   $$\cos t \log t|_x^{2x} + \int_x^{2x} \sin t \log t dt (\stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0) \approx$$

   $$\cos 2x \log 2x - \cos x \log x.$$

   Calocoliamo ora $\lim_{x\to 0^+} \cos 2x \log 2x - \cos x \log x \approx \lim_{x\to 0^+} \log 2x - \log x = \lim_{x\to 0^+} \log \frac{2x}{x} = \log 2$.

3. Poiché la funzione é pari, limite destro e sinistro in zero sono uguali, quindi la discontinuitá é eliminabile e si puï¿$\frac{1}{2}$quindi definire

   $$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ \log 2 & x = 0 \end{cases}$$

4. La funzione é limitata e quindi é Lipschitz.

1.2 (15 punti)

Seguiamo il suggerimento (utilizziamo la sostituzione $1 = (1+x^2) - x^2$)

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x^2)^3} =$$

$$= \int \frac{(1+x^2)dx}{x^3(1+x^2)^3} - \int \frac{x^2 dx}{x^3(1+x^2)^3} = \int \frac{dx}{x^3(1+x^2)^2} - \int \frac{dx}{x(1+x^2)^3} =$$

$$= \int \frac{dx}{x^3(1+x^2)} - 2\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} + \int \frac{xdx}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \int \frac{dx}{x^3} - 3\int \frac{dx}{x(1+x^2)} + 2\int \frac{xdx}{(1+x^2)} - \frac{1}{4(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2x^3} - 3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{xdx}{(1+x^2)} + \log(1+x^2) - \frac{1}{4(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2x^3} - 3\log x + \frac{3}{2}\log(1+x^2) + \log(1+x^2) - \frac{1}{4(1+x^2)^2}.$$

1.3 (15 punti)

- Il dominio di f é $D = \{x > 0\}$
- $lim_{x\to+\infty} = (x(\log x - 1))^2 = +\infty$; $lim_{x\to 0^+} = (x(\log x - 1))^2 = 0$
- $f'(x) = 2(x(\log x - 1))\log x$; $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1, x = e$
  $f''(x) = 2(\log^2 x + \log x - 1)$; $f''(1) = -2 \Longrightarrow 1$ é punto di massimo;
  $f''(e) = 2 \Longrightarrow e$ é punto di minimo.

  Per vedere quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ utilizziamo il TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI:
  $f(1) = 1; f(e) = 0 \Longrightarrow$ l'equazione ha 3 soluzioni $x_1 \in (0,1)$,
  $x_2 \in (1,e), x_3 \in (e,+\infty)$

1.4 (15 punti)

(i) Si cerca una funzione $H(x,y)$ tale che $\dot{x} = \partial H/\partial y$ e $\dot{y} = -\partial H/\partial x$. Integrando

$$\dot{x} = x\left(2y - |x|^3 - 1\right)$$

rispetto a y si trova

$$H(x,y) = x\left(y^2 - |x|^3 y - y\right) + c_1(x),$$

dove $c_1(x)$ è una funzione della sola x (i.e. costante in y). Integrando

$$-\dot{y} = \left(y - 4x^2|x|\right)(y-1)$$

rispetto a x si trova

$$H(x,y) = (y-1)\left(yx - x^3|x|\right) + c_2(y),$$

dove $c_2(y)$ è una funzione della sola y. Uguagliando le due espressioni (e tenendo conto che $x^3|x| = x|x|^3$) si ottiene

$$H(x,y) = x\,(y-1)\left(y - |x|^3\right) + c,$$

dove c è uns costante arbitraria. Possiamo scegliere $c = 0$, e quindi otteniamo

$$H(x,y) = x\,(y-1)\left(y - |x|^3\right).$$

(ii-a) I punti d'equilibrio sono i punti $P = (x,y)$ in cui si annulla il campo vettoriale: $\dot{x} = 0$ richiede $x = 0$ oppure $2y - |x|^3 - 1 = 0$, mentre $\dot{y} = 0$ richiede $y = 4|x|^3$ oppure $y = 1$.

Se $y = 1$ si deve quindi avere $x = 0$ oppure $1 = |x|^3$, i.e. $x = \pm 1$. Se $y = 4|x|^3$ si deve invece avere $x = 0$ (che implica $y = 0$) oppure $7|x|^3 = 1$, i.e. $x = \pm x_*$, con $x_* = (1/7)^{1/3}$ (che implica $y = y_* = 4x_*^3 = 4/7$).

In conclusione si hanno 6 punti d'equilibrio:

$$\begin{array}{lll} P_1 = (0,0), & P_2 = (-1,1), & P_3 = (0,1), \\ P_4 = (1,1), & P_5 = (-x_*, y_*), & P_6 = (x_*, y_*), \end{array}$$

dove $x_* = (1/7)^{1/3}$ e $y_* = 4/7$.

Dato un punto d'equilibrio $z_0 = (x_0, y_0)$, il sistema linearizzato corrispondente, in un intorno del punto z_0, è dato da

$$\dot{z} = A(z_0)\,(z - z_0), \qquad z = (x,y),$$

dove

$$A(z) = \begin{pmatrix} 2y - 4|x|^3 - 1 & 2x \\ 12x|x|(y-1) & 1 + 4|x|^3 - 2y \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(P_2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

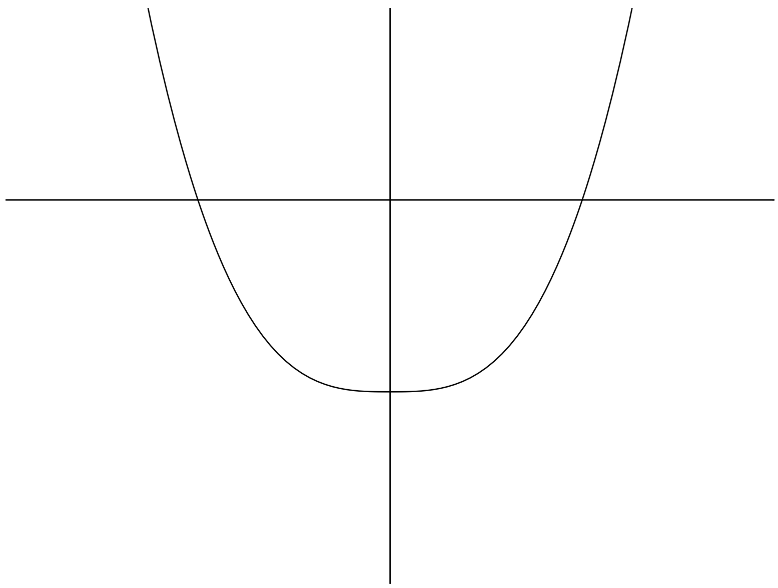
$$A(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A(P_4) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

che mostra che i punti d'equlibrio P_1, P_2, P_3 e P_4 sono punti d'equilibrio instabile poiché la matrice del sistema linerizzato corrispondente ha un autovalore con parte reale positiva.

La stabilità dei restanti punti d'equilibrio P_5 e P_6 sarà discussa dopo la studio delle curve di livello.
(iii) Studiamo prima la curva di livello $\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y) = 0\}$. Si ha $H(x,y) = 0$ lungo le curve

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = 0\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = |x|^3\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = 1\}. \end{aligned}$$

Tale curva di livello è costituita da 11 orbite (4 punti d'equilibrio instabile e 7 archi di curva su cui il moto è asintotico verso i punti d'equilibrio almeno in una direzione temporale). Cfr. la Figura 1.



Le curve di livello sono insiemi invarianti per il sistema. Quindi se si sceglie un dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_0$ la corrispondente traiettoria si svolge su Γ_0. Sulla curva $\mathcal{C}_1$ si ha $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = y(1-y)$, quindi $\dot{y} > 0$ per $0 < y < 1$. Sulla curva $\mathcal{C}_2$ si ha $\dot{y} = 3|x|^3(y-1)$, quindi $\dot{y} > 0$ per $y > 1$, mentre il segno di $\dot{x}$ si ricava per consistenza. Sulla curva $\mathcal{C}_3$ si ha $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = x(1-|x|^3)$, quindi $\dot{x} > 0$ per $0 < x < 1$ e per $x < -1$.

Consideriamo le due regioni chiuse

$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 0, |x|^3 \le y \le 1\right\},$$

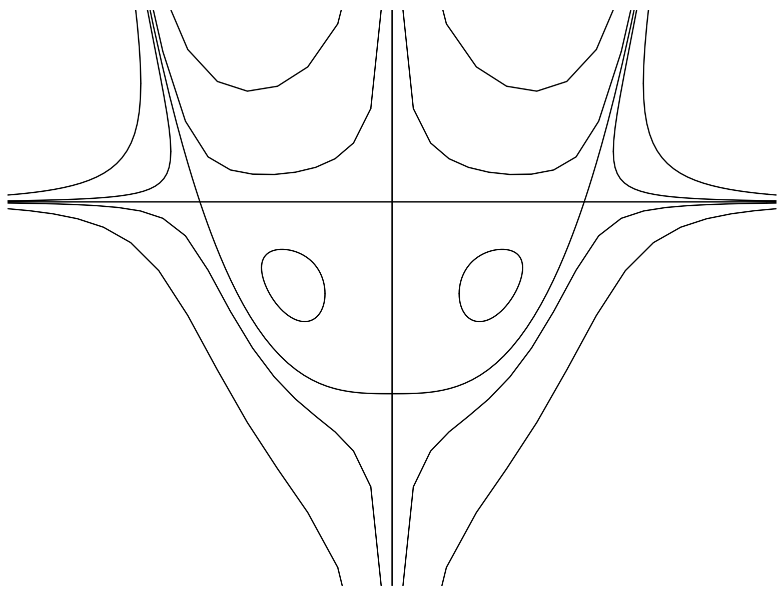
$$U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1, |x|^3 \le y \le 1\right\}.$$

Si ha $P_5 \in \mathrm{int}(U_1)$ e $P_6 \in \mathrm{int}(U_2)$. Inoltre sulla frontiera degli insiemi U_1 e U_2 risulta $H(x,y) = 0$, mentre $H(P_5) = -3x_*|x_*|^3(y_* - 1)$ e $H(P_6) = -H(P_5)$.

Poiché $y_* = 4/7 < 1$ si ha $H(P_5) > 0$ e $H(P_6) < 0$. Quindi P_5 e P_6 sono un punto di massimo e un punto di minimo per H, rispettivamente.

Scegliendo come funzione di Ljapunov $W(x,y) = H(x,y) - H(P_6)$ possiamo dimostrare che P_6 è un punto d'equilibrio stabile. Infatti $W(P_6) = 0$ e $W(x,y) > 0$ in $U_2 \setminus \{P_6\}$, e $\dot{W}(x,y) = 0$ in U_2: si applica quindi il teorema di Ljapunov. Analogamente, scegliendo come funzione di Ljapunov $W(x,y) = H(P_5) - H(x,y)$ si vede che anche P_5 è un punto d'equilibrio stabile.

Le altre curve di livello Γ_E, $E \neq 0$, si possono ottenere per continuità, utilizzando il fatto che la funzione $H(x,y)$ è una funzione continua. Cfr. la Figura 2. Anche i versi di percorrenza si possono ottenere facilmente per continuità da quelli della curva di livello Γ_0. All'interno delle regioni U_1 e U_2 le curve sono chiuse. Tutte le altre curve di livello sono aperte e illimitate.



(iv) Si hanno traiettorie periodiche per dati iniziali negli insiemi $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$, dove $\mathcal{U}_1 = \mathrm{int}(U_1) \setminus \{P_5\}$ e $\mathcal{U}_2 = \mathrm{int}(U_2) \setminus \{P_6\}$.

1.5 (25 punti)

- Notiamo subito che $\forall x \neq 0$, la serie non converge assolutamente poiché assume la forma della serie armonica.

  Poich'e stiamo considerando una serie a segni alterni, per semplificare i vari calcoli consideriamo la serie ottenuta sommando a coppie due elementi cosecutivi:

  $\frac{x}{n+x^2} - \frac{x}{(n+1)+x^2} = \frac{x}{n^2+n(2x^2+1)+x^2+x^4}$

- La convergenza puntuale a questo punto é ovvia poich'e $\forall x \in \mathbb{R}^*$ la serie converge come $1/n^2$, se $x = 0$ la serie é costantemente nulla.

- Per la convergenza uniforme notiamo che $\left|\frac{x}{n^2+n(2x^2+1)+x^2+x^4}\right| \leq \left|\frac{x}{x^4+4x^2+2}\right|$ ove $\frac{x}{x^4+4x^2+2}$ é una funzione limitata.

1.6 (25 punti)

esercizio teorico

2 Gruppo II (Geometria)

2.1 (15 punti)

Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

Per la diagonalizzazione procediamo per passi:

- Per prima cosa calcoliamo gli autovalori di A calcolando gli zeri del polinomio $det(A - I_2\lambda)$. Nel nostro caso otteniamo $\lambda_{1,2} = 8, 4$

- Si passa poi al calcolo degli autospazi relativi agli autovalori trovati: $E(\lambda_i) : (A - \lambda_i I_2)(x),\ x \in \mathbb{R}^2$. hyuj Otteniamo $E_1 = (t, \frac{-\sqrt{3}t}{3})$, $E_2 = (t, \frac{\sqrt{3}t}{3})$

- Per ogni autospazio, bisogna poi scegliere un rappresentante ed ortonormalizzarlo (dividendolo per la sua norma in questo caso semplice in cui gli autospazi sono di dimensione 1)

2.2 (15 punti)

Se $\mathcal{C}$ avesse dimensione finita, allora le funzioni polinomiali su $[0, 1]$ sarebbetro finitamente generate, il che è ovviamente falso! (Se si suppone per assurdo che sia f.g. allora esiste un generatore di grado massimo k, basta far vedere che non esiste una combinazione lineare per generare un elemento di gardo $k + 1$)

Verifichiamo le tre proprietà del prodotto scalare:

1. $\langle f, f\rangle \geq 0$: ora, nel nostro caso $f^2 \geq 0 \Rightarrow$ l'integrale di una funzione positiva è positivo!

2. $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$: $\int f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f \equiv 0$.

3. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$: diretta coseguenza della commutatività delle funzioni a valori in $\mathbb{R}$

2.3 15 punti

Riscriviamo l'applicazione in una forma piú comoda per i calcoli:

$$det = \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$$

Per essere una forma bilineare, l'applicazione deve verificare le tre proprietá di base:

1. (FB1) $\varphi((a+c, b+d), (e,f)) = (a+c)f - (b+d)e = (af - be) + (cf - de) = \varphi((a,b),(e,f)) + \varphi((c,d),(e,f))$
2. (FB2) stesso procedimento con la somma a destra
3. (FB3) $\varphi(\lambda(a,b),(c,d)) = \varphi((\lambda a, \lambda b),(c,d)) = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda\varphi((a,b),(c,d))$

É antisimmetrica se $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$; verifichiamolo:
$\varphi((a,b),(c,d)) = ad - bc = -(cb - da) = -\varphi((c,d),(a,b))$

Troviamo la matrice M associata:
$\varphi((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.4 (15 punti)

Ogni elemento appartenente all'ideale generato da $(1+i)$ puó essere scritto nella forma $(c+id)(1+i), (c+id) \in \mathbb{Z}[i]$.

Vediamo quali elementi appartengono a tale ideale, cercando una condizione semplice da studiare:
$(a+ib) = (c+id)(1+i) = (c-d)+i(c+d) \Rightarrow (c-d) = a \wedge (c+d) = b \Rightarrow d = (a+b)/2 \wedge c = (a-b)/2$ ove $d, c \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a-b)|2$. Se questa condizione non é soddisfatta, ci basta notare che, se $(a-b) \not| \Rightarrow (a+ib) = (1+(a-1)+ib)$, ove $2|((a-1)-b)$.

Possiamo concludere che $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$ é costituito da due soli elementi: $\{[0],[1]\}$ ed é quindi isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

2.5 (25 punti)

Si puó facilmente calcolare, eguagliando le due applicazioni che la martrice associata a ψ é:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. Si dimostra facilmente che $\psi[(a+ib)\cdot(c+id)]= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ e che $\psi[k(a+ib)] = k \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$.

2. Per verificare l'iniettivitá ci basta notare che, se $\psi(a+ib) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, b = 0$. Per far vedere che l'applicazione non é suriettiva mi basta scegliere una qualsiasi matrice 2×2 con determinante non nullo ($\Rightarrow \in GL(2, \mathbb{R})$) che non é nella forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.6 (25 punti)

esercizio teorico