PROVA FINALE DI TIPO B e PROVA D'ACCESSO ALLA LAUREA SPECIALISTICA

6-10-2004

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

a) la sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi (analisi e geometria) e con un totale di almeno 51;

b) il punteggio massimo è 100;

c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (Punti 15)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \log x + \int_x^1 \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

Studiare la funzione f: dominio di definizione, limiti, crescenza, etc...

1.2 (Punti 15)

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

1.3 (Punti 15)

Studiare la convergenza della successione seguente, definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \neq 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{2a_n} \end{cases}$$

1.4 (Punti 15)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2yx^2\,(x^2 + 2y^2 - 1)\,, \\ \dot{y} = -2xy^2\,(2x^2 + y^2 - 1)\,. \end{cases}$$

(i) Verificare che il sistema ammette una costante del moto $H(x, y)$ e determinarla.
(ii) Determinare i punti d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
(iii) Discutere qualitativamente il moto del sistema.

1.5 (Punti 25)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt^2)}{t}\mathrm{d}t.$$

Si dimostri che f è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

1.6 (Punti 25) **Dissertazione teorica**

Il teorema di Weierstrass sui massimi e i minimi delle funzioni continue.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (Punti 15)

Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sia F l'endomorfismo di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definito nel modo seguente: se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$F(A) = (b_{ij}) \qquad \text{con} \qquad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

1. Determinare $\mathrm{N}(F)$, $\mathrm{Im}(F)$ e le loro dimensioni.
2. Verificare che $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{N}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.
3. Stabilire se $\mathrm{N}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ sono autospazi di F.

4. Stabilire se F è diagonalizzabile.

2.2 (Punti 15)

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $AB + BA = B$.

1. Verificare che $AB^2 = B^2 A$.

2. Provare che se B è invertibile, allora per ogni autovalore λ di A anche $1 - \lambda$ è un autovalore di A.

3. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Determinare una matrice B tale che $AB + BA = B$ e $B^2 = I$.

2.3 (Punti 25)

Sia $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata X di grado non superiore a 2. In $\mathbf{V}$ si consideri la base $\mathbf{e} = \{1, 1 + X, X^2\}$ e la forma quadratica $\mathbf{q}$ definita da:

$$\mathbf{q}(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = 2a_0^2 + 2a_0 a_1 + a_1^2 - a_2^2.$$

1. Determinare la matrice che rappresenta $\mathbf{q}$ rispetto ad $\mathbf{e}$.

2. Determinare con il metodo di Lagrange una base diagonalizzante per $\mathbf{q}$ a partire da $\mathbf{e}$.

3. Si consideri in $\mathbf{V}$ il seguente prodotto scalare: se $f, g \in \mathbf{V}$
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$
   (a) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si ortonormalizzi $\mathbf{e}$ rispetto a $\langle\, , \rangle$.

   (b) Sia $\mathbf{f}$ la base ortonormale ottenuta nel punto precedente e sia W il sottospazio vettoriale di equazione $x + 2y - z = 0$ (rispetto alla base $\mathbf{f}$). Determinare la proiezione ortogonale del vettore v di coordinate $(1, 0, -1)$ rispetto alla base $\mathbf{f}$ sul sottospazio W.

2.4 (Punti 15)

In $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, dotato del riferimento proiettivo standard, si consideri la proiettività f indotta dall'isomorfismo φ di $\mathbb{R}^4$ definito da :

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, x_1, -x_2, -x_3).$$

1. Determinare f^2.
2. Verificare che i punti fissi di f appartengono a due rette sghembe $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$.
3. Verificare che se $P = [0, 1, 0, -1]$, allora $f(P) \neq P$; sia $\mathbf{t}$ la retta congiungente P ed $f(P)$ e siano $P' = \mathbf{r} \cap \mathbf{t}$ e $P'' = \mathbf{s} \cap \mathbf{t}$; determinare $\beta(P, f(P), P', P'')$.

2.5 (Punti 15)

Dato un intero $n \geq 2$, il *gruppo diedrale* D_{2n} è il sottogruppo del gruppo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ generato dalle due matrici:

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

dove $\alpha := e^{2\pi i/n}$.

1. Dimostrare che D_{2n} ha ordine $2n$ e che D_{2n} contiene un sottogruppo ciclico di indice 2.
2. Si consideri il seguente sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$:
$$G_n := \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1\,,\ x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\} .$$
Mostrare che G_n è isomorfo a D_{2n}.
3. Si consideri il seguente sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$:
$$G_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \epsilon = \pm 1\,,\ z \in \mathbb{Z} \right\} .$$
Mostrare che, per ogni n, D_{2n} è un gruppo quoziente del gruppo G_∞.

2.6 (Punti 25) **Dissertazione teorica**

Introdurre la nozione di operatore unitario su uno spazio vettoriale euclideo dandone almeno tre definizioni equivalenti. Enunciare una condizione necessaria affinch uno scalare λ sia autovalore di un operatore unitario.