Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di preparazione alla PFB

A.A. 2012-2013 - Docente: A. Bruno e G. Gentile
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Parte 1: Analisi Matematica

1. Dato $p > 0$ provare che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

2. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e periodica, allora non esiste $\lim_{x\to\infty} f(x)$, a meno che f non sia costante.

3. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{my}{2})$ con $m > 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Provare che se $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è tale che $F(\Gamma(g)) \subseteq \Gamma(g) := \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, allora g è una funzione costante.

4. Mostrare la seguente identità
$$\prod_{k=0}^{n}(1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

5. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2}{2^n+n^3}$; (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln(\frac{\sqrt{1+e^{2n}}+3^n}{\sqrt{1+16^n}+3^n})$; (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x \sin x}$;

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \frac{\sqrt{n!+n^2}-\sqrt{n!}}{\sqrt{n!}+4}}$; (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{\ln^2 n+\ln n^2}}}{n^2+1}$; (f) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

6. Determinare il limite delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

   (a) $a_1 = 1, \quad a_n = n + a_{n-1}$;

   (b) $a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^2+1}{4a_n}$ (*Suggerimento:* mostrare che $a_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$);

   (c) $a_0 > \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$;

7. Discutere la convergenza semplice e assoluta (laddove sia necessario) delle seguenti serie:

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{3n+5})$; (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$; (d) $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}+1}{n!}$; (e) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt[3]{n^5+2n^3+17}}{\sqrt{n+2}}$.

   (b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^3 n}$;

8. Discutere la convergenza semplice e assoluta (laddove sia necessario) delle seguenti serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2+x^n}$; (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$; (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}$; (d) $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln(n^2 x)}{n^2+x^2}$.

9. (a) Mostrare che $\forall x, y > 0$ e $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
   (Disuguaglianza di Young)

   (b) Mostrare che $\forall p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\{a_n\} \in \ell_p$ e $\{b_n\} \in \ell_q$ si ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   (Disuguaglianza di Holder)

(Suggerimenti: per il punto (a) trovare il massimo di $f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$, per il punto (b) applicare (a)).

10. Discutere la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = n^x$.

   (b) $f_n(x) = \frac{\chi_{[n,n+1]}}{n}$.

   (c) $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2x^2+1}$.

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$.

11. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che ∂A sia una curva regolare γ. Siano $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ due funzioni.

   (i) Dimostrare che

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = \langle \nabla u, \nabla u \rangle + u \cdot \Delta u.$$

   (ii) Verificare la formula d'integrazione per parti

$$\int_A u \Delta u dxdy = \int_\gamma \langle u \nabla u, \mathbf{n} \rangle d\sigma - \int_A \langle \nabla u, \nabla u \rangle dxdy.$$

   (iii) Si supponga che u sia identicamente nulla su ∂A, e che $\Delta u(x) = \lambda u(x)$ per ogni x in A. Si dimostri che se u non è identicamente nulla, allora $\lambda < 0$.

12. Sia ω la forma differenziale su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x, y, z) = y \sin z dx + x \sin z dy + xy \cos z dz.$$

   (i) Dire se ω è chiusa;

   (ii) Dire se ω è esatta;

   (iii) Se la risposta al punto (ii) è affermativa, calcolare una primitiva di ω.

13. Per $a > 0$, calcolare

$$\int_G z dxdydz \qquad \text{con} \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \leq \frac{a^2}{4}\}.$$

14. Data la funzione $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$H(x, y) = \frac{1 + (x^2 - 1)^2}{1 + y^2},$$

   si consideri il sistema dinamico planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

   (a) Determinare i punti di equilibrio del sistema.

   (b) Discuterne la stabilità.

   (c) Studiare analiticamente le curve di livello della funzione $H(x, y)$ e darne una rappresentazione grafica.

   (d) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.

   (e) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ è periodica.

   (f) Scriverne il periodo T come integrale definito.

15. Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\alpha}{8\rho^8},$$

   dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α e del momento angolare L, si risponda alle seguenti domande.

   (a) Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.

   (b) Si determinino i punti di equilibrio.

   (c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.

   (d) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.

   (e) Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(f) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(g) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.

16. Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad V(x,y) = (x^2+y^2)(2-x^2).$$

(a) Determinare i punti di equilibrio;

(b) Studiarne la stabilità;

(c) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema;

(d) Stimare il bacino di attrazione di eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili.

17. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1+\alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Si discutano i massimi e i minimi relativi e assoluti(qualora esistano) della funzione $f(x,y) = xy^2(x+y-1)$ nel dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geq 1\}$

19. Calcolare massimo e minimo di $f(x,y) = x - y$ in

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 2y^2 = 1 \quad 0 \leq x \leq 3\}$$

20. Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y \geq 2 \;\; e \;\; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ e $f(x,y) = e^{xy}$, calcolare massimi e minimi di f su E.

21. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{4}x \leq y^2 \leq x, 1 \leq xy \leq 2\}$. Calcolare

$$\int_A \log \frac{x}{y^2} dxdy$$

22. Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y+1\}$. Calcolare

$$\int_A x dxdydz$$

23. $\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} d\sigma$ in
$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; z = x + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2, \; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \;, \; 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; y \leq \sin x\}$

24. Calcolare il flusso del campo vettoriale:

$$F(x,y,z) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{3y}{x^2+y^2}, 1)$$

attraverso la superficie S che ha rappresentazione parametrica

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u \sin v, u^2) \qquad u \in [0, \frac{1}{2}] \;\; v \in [0, 2\pi]$$

orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.

Parte 2: Geometria e Algebra

1. In $V = \mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e W di equazione $kx + y + (k-2)z = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Determinare, al variare di k, la dimensione e una base dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$ di V.

2. Sia $F : \mathbb{R}^{350} \to \mathbb{R}^{250}$ un'applicazione lineare e sia $V \subseteq \mathbb{R}^{350}$ un sottospazio vettoriale tale che

$$\dim V = 300, \qquad \dim(V \cap \ker(F)) = 50.$$

   Calcolare le dimensioni di $F(V)$ e di $V + \ker(F)$. Dire se F è suriettiva.

3. Sia A una matrice quadrata 4×4 a coefficienti in $\mathbb{R}$ tale che $A^2 = I$. Dimostrare che:
   (a) $A - I$ e $A + I$ non sono entrambe invertibili;
   (b) $\ker(A + I) \cap \ker(A - I) = 0$;
   (c) $Ax - x \in \ker(A + I)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$;
   (d) $\mathrm{rg}(A - I) + \mathrm{rg}(A + I) = 4$.

4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ una sua base. Determinare la dimensione e una base del sottospazio W di V generato dai vettori

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_4} - \mathbf{u_3} + \mathbf{u_1}, \quad \mathbf{v_2} = \mathbf{2u_2} + \mathbf{u_3} - \mathbf{u_4}, \quad \mathbf{v_3} = \mathbf{2u_2} + \mathbf{2u_1} + \mathbf{u_4} - \mathbf{u_3}.$$

   Completare poi la base trovata ad una base di V.

5. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ avente come base $\mathcal{B} := \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_4}\}$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito ponendo

$$f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}, \qquad f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_4}) = \mathbf{2}(\mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}).$$

   Determinare una base di V costituita da autovettori per f.

6. Sia $D : K^2 \times K^2 \to K$ l'applicazione così definita:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2.$$

   (a) Verificare che l'applicazione D (detta applicazione determinante) è una forma bilineare antisimmetrica.
   (b) Scrivere la matrice di D rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di K^2.
   (c) Calcolare il cono isotropo $I_D(K^2)$.

7. Sia data in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ di equazione:

$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$

   (a) Classificare $\mathcal{C}_{(a,b)}$ al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere?
   (b) Determinare a e b tali che la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ passi per i punti $P_1 = (0, \sqrt{2})$ e $P_2 = (1, -3 + \sqrt{10})$.
   (c) Sia $\mathcal{C}$ la conica che verifica (b) e sia $\mathcal{D}$ la conica di equazione $xy - 3x - 2y + 4 = 0$. Esiste un'affinità T tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$? In caso affermativo determinarla.

8. In $\mathbb{R}^4$, dotato di prodotto scalare standard, è assegnato l'operatore lineare T definito, rispetto alla base canonica E di $\mathbb{R}^4$, dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determinare una base ortonormale F di autovettori di T e scrivere la matrice di T rispetto a tale base.

9. Sia C la conica euclidea di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$7x^2 - 3y^2 - 10\sqrt{3}xy - 12y - 12\sqrt{3}x - 12 = 0$$

   (a) Determinarne il tipo.
   (b) Determinare tutte le isometrie di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ (indicandone il tipo e scrivendone le equazioni) che trasformano C nella forma canonica D ad essa congruente.

10. Riconoscerne il tipo e ridurre a forma canonica le seguenti coniche:
   (a) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$;
   (b) $x^2 + xy - 2y^2 + 2y - 1 = 0$;
   (c) $25x^2 + 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

11. Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e sia χ_S la funzione caratteristica di S. Dimostrare che χ_S è continua in p se e soltanto se $p \notin Fr(S)$.

12. Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$, con $X \neq \emptyset$ connesso e Y discreto è costante.

13. Sia G il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Esistono due interi $a, b > 1$ tali che $G \simeq \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$?

14. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \text{ tale che } (n, m) \mapsto 2n + 3m.$$

   (a) Dimostrare che φ è un omomorfismo di gruppi.
   (b) Descrivere il nucleo e l'immagine di φ e dare una rappresentazione di $\mathrm{Im}(\varphi)$ tramite il Teorema Fondamentale di Omomorfismo di gruppi.

15. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$ t.c. $f_\alpha(f(X)) = f(\sqrt{\alpha})$. Dimostrare che:
   (a) f_α è un omomorfismo e $(X^2 - \alpha) \subseteq \ker(f_\alpha)$;
   (b) Determinare $\mathrm{Im}(f_\alpha)$;
   (c) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha$ è un quadrato perfetto.

16. Sia dato il gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ con l'usuale prodotto righe per colonne.
   (a) Dimostrare che l'insieme

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$.
   (b) Sia

$$G_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, G_n è un sottogruppo normale di G.
   (c) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \varphi_n : & G & \to & G^n \subseteq GL_2(\mathbb{Z}_n) \\ & \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \pm 1 & k \bmod n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   è un omomorfismo e determinarne nucleo e immagine.
   (d) Dimostrare che $\mathrm{Im}(\varphi_n) \cong D_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, n > 1$.

17. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e sia I un suo ideale non nullo. Provare che se esiste $a + ib$ in I, con $a^2 + b^2$ numero primo, allora I è massimale.

18. Si consideri il campo $\mathbb{F}_7 = \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ e il polinomio $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$. Dimostrare che l'anello quoziente $\mathbb{F}_7[X]/(f(X))$ è un campo e se ne calcoli il numero di elementi.

19. Sia G un gruppo finito e sia H un sottoinsieme non vuoto di G. Verificare che

$$H \leq G \Leftrightarrow H \cdot H \subseteq H.$$

20. Si considerino i polinomi

$$f_1(X) := X^4 + X + 1, \quad f_2(T) := T^3 + T + 1 \in \mathbb{F}_2(T).$$

(a) Si verifichi che f_1, f_2 sono irriducibili su $\mathbb{F}_2$.

(b) Si costruisca un ampliamento K di $\mathbb{F}_2$ contenente sia una radice α di f_1 che una radice β di f_2.

(c) Si determini una base di ciascuno degli spazi vettoriali $\mathbb{F}_2(\alpha), \mathbb{F}_2(\beta)$ (su $\mathbb{F}_2$). Quali sono le componenti di β^4 rispetto alla base data per $\mathbb{F}_2(\beta)$?

(d) Si verifichi esplicitamente che TUTTE e SOLE le radici di f_1 (risp. f_2) in K sono $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ (risp. β, β^2, β^4.

(e) É vero che $\mathbb{F}_2(\beta) = \mathbb{F}_2(\beta^2 + 1)$? É vero che $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_2(\alpha^2 + 1)$?

(f) Si determini un campo di spezzamento L del polinomio $f_1(X)f_2(X)$ e si calcoli $[L : \mathbb{F}_2]$.