Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di preparazione alla PFB

A.A. 2012-2013 - Docenti: A. Bruno e G. Gentile
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Parte 1: Analisi Matematica

1. Sia

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x + y + z < 1\}.$$

Calcolare

$$\int_T (x + z)dxdydz$$

[*Pfb,* 20 *gennaio* 2011]

Soluzione:

$$\int_T (x+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+z)dz = \frac{1}{12}.$$

---

2. Determinare il comportamento delle seguenti serie precisando quali convergono assolutamente

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; (b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\binom{n}{k}}$.

[*Pfb,* 20 *gennaio* 2011]

Soluzione:

(a) La serie è convergente; infatti, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}$ implica $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

(b) La serie converge semplicemente mentre non converge assolutamente. La convergenza semplice di $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ si dimostra applicando il criterio di Leibniz per le serie a segno alterno, osservando che la funzione $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ è decrescente per $x > e$.
Per quando riguarda la convergenza assoluta, si osservi che $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ se $n \geq 4$.

(c) La serie è convergente per $k \geq 2$.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\binom{n}{k}} = \sum \frac{nk!(n-k)!}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{k!}{(n-1)\cdots(n-(k-1))} \sim \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 2.$$

---

3. Sia

$$F = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < 1, 0 < x < \sqrt{z}\}.$$

Si disegni schematicamente il solido ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme F e se ne calcoli il volume.

[*Pfb,* 20 *gennaio* 2011]

Soluzione:

Il solido ottenuto è un paraboloide. Il volume V è dato da:

$$V = \int_F dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

---

4. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con le coordinate $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Sia A una matrice simmetrica reale 3×3, sia u la funzione definita da $u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Dimostrare che

   (i) $\nabla u(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$;

   (ii) $\Delta u(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}(A)$.

   <u>Soluzione:</u>

   (i) Posto $A = (a_{ij})$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$, si ha che $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$. Osserviamo che

   $$u_x = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle + \frac{1}{2}\langle A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{x}\rangle = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z.$$

   Analogamente $u_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$ e $u_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$. Dalle precedenti relazioni segue l'asserto.

   (ii) Per definizione si ha che $\Delta u(x) := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathrm{tr}(A)$.

---

5. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} \le c^2\}.$$

   (i) Dimostrare che la misura di A è πedc^2;

   (ii) Dimostrare che il determinante jacobiano della trasformazione

   $$\varphi : (x, y, z) \to (u, v, p) \text{ con } u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \text{ e } p = z$$

   è 1.

   (iii) Calcolare

   $$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz$$

   dove

   $$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1\}.$$

   Potrebbe essere utile applicare il cambiamento di variabili del punto (ii) e affettare rispetto alla v.

   [*Pfb,* 30 *settembre* 2010]

   <u>Soluzione:</u>

   (i) Sfruttando le coordinate ellittiche abbiamo che $\mathrm{mis}(A) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dc^2 e\rho d\rho = \pi edc^2$.

   (ii) Ricordiamo che $\mathrm{Jac}(\varphi) = (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Quindi $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = 1$

(iii) Per prima cosa notiamo che E in coordinate (u,v,p) è $\{(u,v,p) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2+v^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} \leq 1\}$, dunque di ha:

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz = \int_E e^v dvdudp = \int_{-a}^{a} e^v \int_{\{\frac{u^2+v^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}\leq 1\}} dudpdv = \int_{-a}^{a} e^v \mathrm{mis}(A) = ab\pi \int_{-a}^{a} e^v (1-\frac{v^2}{a^2})dv =$$

$$= ab\pi(e^a - e^{-a}) - \frac{b\pi}{a}\left[a^2(e^a - e^{-a}) - 2(ae^a + ae^{-a}) + 2(e^a - e^{-a})\right] = \frac{2b\pi}{a}(e^a - e^{-a}).$$

---

6. Stabilire se esiste finito il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx$$

e, in caso affermativo, calcolarlo.

[*Pfb*, 30 *settembre* 2010]

SOLUZIONE:

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$ presenta una singolarità in 0 del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = 1/2 < 1$ ed è perciò integrabile. Mediante calcolo diretto si ottiene.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx = \frac{3}{4}.$$

---

7. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale.

SOLUZIONE:

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210/sol1.pdf`

---

8. Calcolare

$$\int_1^2 \frac{e^t(e^t-1)}{e^{2t}-1} dt$$

[*Pfb*, 7 *giugno* 2010]

SOLUZIONE:

Effettuando il cambio di variabili $v = e^t$ si ha che

$$\int_1^2 \frac{e^t(e^t-1)}{e^{2t}-1} dt = \int_e^{e^2} \frac{(v-1)}{v^2-1} dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{v+1} dt = \ln|e^2+1| - \ln|e+1|.$$

---

9. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{\ln(1+e^{4x})}$.

[*Pfb, 7 giugno* 2010]

SOLUZIONE:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^3}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}(x+3)=0.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{\ln(1+e^{4x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{4x}}{\ln(1+e^{4x})}\frac{1}{e^{4\ln(x^2)}e^{4x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{4x}}{\ln(1+e^{4x})}\frac{1}{e^4e^{x(\frac{\ln(x^2)}{x}+1)}}=+\infty.$

---

10. Si calcoli

$$\int_T xy\sin(xy)dxdy$$

dove $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y<2x,\ \frac{2\pi}{x}<y<\frac{3\pi}{x},\ x>0\}$. Potrebbe essere utile il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x}. \end{cases}$$

[*Pfb, 7 giugno* 2010]

SOLUZIONE:
Effettuando il cambiamento di variabili suggerito si ha

$$\int_T xy\sin(xy)dxdy=\int_{T^*}\frac{1}{2v}u\sin u\,dudv$$

dove $T^*=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 1<v<2,\ 2\pi<u<3\pi\}$. Quindi

$$\int_T xy\sin(xy)dxdy=\int_1^2\frac{1}{2v}\int_{2\pi}^{3\pi}u\sin u\,dudv=-\frac{\pi}{2}\int_1^2\frac{1}{v}dv=-\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

---

11. Determinare al variare del parametro reale x la convergenza delle seguenti serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(n^{\ln x}\right)$ con $x>0$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\arctan(1+n^2)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^n$ con $x\neq1$.

SOLUZIONE:

(a) In primo luogo studiamo il termine $n-$simo della serie.

$$\lim_{n\to+\infty}\arctan(n^{\ln x})=\begin{cases} 0 & \text{se } 0<x<1 \\ \pi/4 & \text{se } x=1 \\ \pi/2 & \text{se } x>1. \end{cases}$$

Dunque, sicuramente, la serie non converge per $x\geq1$.
Consideriamo il caso $0<x<1$. Poiché $0<n^{\ln x}<1$ (cioè $n^{\ln x}$ è in un intorno di zero), si ha che $\arctan(n^{lnx})\sim n^{\ln(x)}$, da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(n^{\ln x}\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln x}$$

quest'ultima converge se e soltanto se $\ln x<-1\Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$. Dunque c'è convergenza per $0<x<1/e$ mentre la serie diverge per $1/e<x<1$.

(b) In primo luogo, studiando $\frac{x}{x-1} \geq 0$, otteniamo che per $x \leq 0$ o $x > 1$ la serie è a termini positivi mentre per $0 < x < 1$ la serie è a termini alterni.

$\boxed{x \leq 0 \text{ o } x > 1:}$ Applicando il criterio della radice si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\arctan(1+n^2)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^n} = \frac{x}{x-1} = \begin{cases} <1 \Leftrightarrow x \in [-\infty,1) \cap ([-\infty,0] \cup (1,+\infty)) = [-\infty,0]; \\ >1 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Dunque la serie diverge per x in $(1,+\infty)$ mentre converge in $[-\infty,0]$.

$\boxed{0 < x < 1:}$ Applicando il criterio della radice alla serie a termini positivi

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n\arctan(1+n^2)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\arctan(1+n^2)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\arctan(1+n^2)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n} = \frac{x}{1-x} < 1.$$

Ne deduciamo che la serie converge assolutamente e quindi semplicemente in $(0,1)$.

---

12. Sia $u_1 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva che soddisfa l'equazione differenziale

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0 \qquad x \geq 0. \tag{1}$$

Si supponga inoltre che l'integrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{u_1^2(t)} < \infty \tag{2}$$

(i) Dimostrare che anche la funzione

$$u_2(x) = u_1(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{u_1^2(t)}$$

soddisfa (1).

(ii) Usando il punto (i), dimostrare che, se (1) ha una soluzione positiva su $[0,+\infty)$ per cui vale (2), allora 1 ha due soluzioni y_1 e y_2 positive su $[0,+\infty)$ e tali che:

(a)
$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1 \qquad x > 0;$$

(b)
$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]' < 0 \qquad x > 0;$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 0.$$

[*Pfb, 1 ottobre* 2009]

SOLUZIONE:

(i) Si ha che

$$u_2''(x) = u_1''(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{u_1^2(t)} - u_1'(x)\left(\frac{1}{u_1^2(x)}\right) + u_1'(x)\left(\frac{1}{u_1^2(x)}\right) = u_1''(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{u_1^2(t)}.$$

Dunque sostituendo in (1) si ottiene l'asserto.

(ii) Basta scegliere $y_1 = u_2$ e $y_2 = u_1$.

13. Si consideri l'insieme
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0\}.$$
   (i) Si dimostri che i punti $(0, 0), (0, 1)$ e $(0, -1)$ sono in A.
   (ii) Enunciare il teorema della funzione implicita in $\mathbb{R}^2$.
   (iii) Dimostrare che in un intorno del punto $(0, 1)$, A è il grafico di una funzione $y(x)$; calcolare $y'(0)$. Stessa domanda per il punto $(0, -1)$.
   (iv) Determinare se valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto $(0, 0)$.
   (v) Usando i moltiplicatori di Lagrange, trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = y$ su A.

[*Pfb*, 12 *giugno* 2008]

Soluzione:

(i) L'asserto segue da una verifica diretta.
(ii) Si veda Teorema 15.5, Analisi matematica 2, E.Giusti.
(iii) Verifichiamo che la funzione $F(x, y) := x^4 + y^4 + x^2 - y^2$ soddisfa le ipotesi del teorema della funzione implicita.
   (a) $F(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
   (b) $F(0, 1) = F(0, -1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0 \neq -2 = \frac{\partial F}{\partial y}(0, -1)$.
(iv) No, perché $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$.
(v) Il sistema
$$\begin{cases} 0 = \lambda(4x^3 + 2x) \\ 1 = \lambda(4y^3 - 2y) \\ x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$
ha soluzioni $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (0, -1)$ che rappresentano rispettivamente il massimo e il minimo vincolati di f.

---

14. Sia dato il sistema dinamico planare
$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 2) \end{cases}$$
   (i) Dimostrare che esiste una costante del moto $H(x, y)$ per il sistema dato.
   (ii) Determinare i punti di equilibrio del sistema.
   (iii) Discuterne la stabilità
   (iv) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.

Soluzione:

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/FM1/esercizi/fmes17042009c.pdf`

---

15. Una particella di massa m si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $V(r)$:
$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_x V(|\mathbf{x}|)$$
con
$$V(r) = \alpha \frac{\log^2 r/r_0}{r^2}$$
e $\alpha, r_0 > 0$.

(i) Si determinino le costanti del moto.
(ii) Si disegnino il grafico del potenziale efficace, le curve di livello nel piano $(r, \dot r)$ e si studi qualitativamente il moto radiale.
(iii) Laddove il moto risulti periodico si calcolino i punti si inversione, i periodi del moto radiale e del moto angolare in termini di due integrali definiti.

<u>Soluzione:</u>

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210/sec-esonero-sol.pdf`

---

16. Si risolva il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot x = 2x + (1-\beta)y \\ \dot y = 2(1+\beta)y + \beta z \\ \dot z = 3\beta y + 2z \end{cases}$$

al variare del parametro $\beta \in [-1;1]$ con condizione iniziale $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 6, -6)$. Si discuta inoltre la stabilità del punto di equilibrio $(0,0,0)$.

<u>Soluzione:</u>

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210/esonero-s.pdf`

---

17. Sia $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$.
(a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.
(b) Stabilire f_n e/o f_n' convergono uniformemente.
(c) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

<u>Soluzione:</u>

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+nx^2} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

(b) $f_n(x) \to 0$ uniformemente perchè $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n'(x) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt n}\right)\right| = \dfrac{1}{2\sqrt n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; $f_n'(x)$ invece non converge uniformemente perchè la funzione limite è discontinua, ma la convergenza è uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$, perché

$$f_n''(x) = \frac{2nx\left(nx^2-3\right)}{(1+nx^2)^2} = 0 \iff x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3n}}$$

e dunque per $n \geq \dfrac{1}{3\delta^2}$ ho che $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}\right| = \left|\dfrac{1-n\delta^2}{(1+n\delta^2)^2}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(c) Essendo $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = (0)' = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \ \forall x \neq 0.$$

Parte 2: Geometria e Algebra

1. Siano A e B due matrici 3×3. Si dimostri che $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

[*Pfb,* 28 *settembre* 2011]

Soluzione:

Si può procedere mediante verifica diretta o adattando la dimostrazione del Corollario 6.3, Geometria 1, E.Sernesi.

---

2. Siano A, B due matrici $n \times n$. Si dimostri che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

[*Pfb,* 13 *giugno* 2007]

Soluzione:

Posto $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, si ha che $\mathrm{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_i \sum_k b_{ik} a_{ki} = \mathrm{tr}(BA)$.

---

3. Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica $\mathcal{C}$ che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$3X^2 - 2XY + 3Y^2 + 2X + 2Y = 0.$$

[*Pfb,* 28 *settembre* 2011]

Soluzione:

Siano

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{00} := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La conica è un ellisse non degenere in quanto $\det A \neq 0$ e $\det A_{00} > 0$. Il centro di simmetria è $C = (-2; 1)$. Portiamo la conica in forma canonica:

$\boxed{\text{Passo 1:}}$ Diagonalizzazione di A_{00}. La matrice A_{00} ammette autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Se B indica la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica a quella degli autovettori (normalizzati) si ha che $B^{-1} A_{00} B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Quindi nelle nuove coordinate la conica $\mathcal{C}$ sarà descritta dall'equazione $2X'^2 + 4Y'^2 + 2X' + 2Y' = 0$.

$\boxed{\text{Passo 2:}}$ Per eliminare i termini di primo grado si procede attraverso il metodo del completamento dei quadrati.

$$2X'^2 + 4Y'^2 + 2X' + 2Y' = 2\left(X' + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(Y' + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$$

Ponendo $X'' = X' + \frac{1}{2}$ e $Y'' = Y' + \frac{1}{4}$ si ottiene l'equazione della conica in forma canonica:

$$\frac{X''^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y''^2}{\frac{3}{16}} = 1.$$

---

4. Nel piano euclideo si considerino la famiglia di coniche di equazione

$$\mathcal{F} : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0 \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

e la retta $\mathcal{R}$ di equazione $x + y - 1 = 0$.

(i) Si dimostri che la retta $\mathcal{R}$ è asse di simmetria di tutte le coniche della famiglia.

(ii) Si determinino le coniche degeneri della famiglia $\mathcal{F}$.

(iii) Fra le coniche della famiglia $\mathcal{F}$ si dimostri che ne esiste una e una sola passante per $C = (2, -1)$ e se ne determinino le equazioni in forma cartesiana e in forma canonica.

<u>Soluzione:</u>

(a) Sia $\mathcal{C}_t : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0$.
Osserviamo che $\mathcal{R}$ sarà asse di simmetria di tutte le coniche della famiglia se $\rho_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_t) = \mathcal{C}_t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
Determiniamo le equazioni della riflessione di asse la retta $\mathcal{R}$.
Partendo dall'equazione generale di una riflessione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

imponiamo che siano fissati due punti di $\mathcal{R}$, ad esempio $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (1, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo: $\begin{cases} b + e = 0 \\ -a + f = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo: $\begin{cases} a + e = 1 \\ b + f = 0 \end{cases}$

Mettendo a sistema le condizioni trovate si ha:

$$\begin{cases} b + e = 0 \\ -a + f = 1 \\ a + e = 1 \\ b + f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -e \\ a = f - 1 \\ f - 1 + e = 1 \\ -e + f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ 2e = 2 \\ a = 0 \\ e = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ e = 1 \\ a = 0 \\ e = 1 \end{cases}$$

Pertanto la riflessione cercata è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricaviamo quindi che $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$, da cui esplicitando x e y si ottiene: $\begin{cases} y = 1 - x' \\ x = 1 - y' \end{cases}$.

Dunque, sostituendo le espressioni di x e y nell'equazione del fascio di coniche otteniamo che $\rho_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_t)$ ha equazione:

$$(1 - y')^2 + (1 - x')^2 + t(1 - y')(1 - x') - (t + 3)(1 - y') + 1 - x' =$$

$$= 1 + y'^2 - 2y' + 1 + x'^2 - 2x' + t + tx'y' - ty' - tx' - ty' - t + ty' - 3 + 3y' + 1 - x' =$$

$$= x'^2 + y'^2 + tx'y' - tx' - 3x' + y' = 0.$$

Essendo quest'ultima proporzionale all'equazione di $\mathcal{C}_t$, si ha $\rho_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_t) = \mathcal{C}_t$.

(b) La matrice associata a $\mathcal{C}_t$ è:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(t+3)}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{(t+3)}{2} & 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i valori di t per cui si ha $\det(A)$=0

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{(t+3)}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{(t+3)}{2} & 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(t+3)}{2} \begin{vmatrix} -\frac{(t+3)}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{(t+3)}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \end{vmatrix} =$$

$= (\frac{t+3}{2})(-\frac{3}{2} - \frac{3t}{4}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - \frac{3t}{4} - \frac{t^2}{4}) = -\frac{5}{2} - \frac{9t}{4} - \frac{t^2}{2}.$

Si ottiene quindi che $t_1 = -\frac{5}{2}$e $t_2 = -2$ sono gli unici valori per cui si hanno coniche degeneri.

(c) Determiniamo t tale che $C = (2, -1)$ soddisfi l'equazione di $\mathcal{C}_t : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0$

$4 + 1 - 2t - 2t - 6 - 1 = 0 \Rightarrow -4t = -2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Pertanto la conica cercata è $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{7}{2}x + y = 0$, la cui matrice associata è:

$$A_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \quad A_{00\,\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Poichè $\det(A_{\frac{1}{2}}) = -\frac{11}{4}$ e $\det(A_{00\,\frac{1}{2}}) = \frac{15}{16} > 0$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ è un'ellisse non degenere. Inoltre essendo il minore principale $D_1 = 0$, $A_{\frac{1}{2}}$ non è né definita negativa, né definita positiva, da cui avrà segnatura $(2, 1)$ o $(1, 2)$. Ne segue che $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ è un'ellisse non degenere a punti reali e pertanto avrà forma canonica corrispondente:

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

---

5. Dato il fascio di coniche in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$$\Gamma_t : x^2 + y^2 - 4txy + 2ty + 1 = 0$$

(i) Classificare Γ_t al variare di t;

(ii) Determinare il centro di simmetria di Γ_t per i valori di t per i quali Γ_t è una conica a centro.

(iii) Per $t = 1$ ridurre Γ_1 alla sua forma canonica affinemente equivalente e scrivere l'equazione dell'affinità.

<u>Soluzione:</u>

(a) La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -2t \\ t & -2t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ -2t & 1 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 1 - 5t^2$

$det(A_{00}) = 1 - 4t^2$

Sappiamo che una conica è degenere se $det(A) = 0$, non degenere altrimenti; in particolare (nel caso in cui sia degenere) sarà semplicemente degenere se $r(A) = 2$, doppiamente degenere se $r(A) = 1$.

Nel nostro caso $det(A) = 1 - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Per questi valori di t la conica è semplicemente degenere poichè in ogni caso il minore $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e quindi $r(A) \geq 2$.

Inoltre per $t = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ si ha $det(A_{00}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \geq 0$, cioè $\Gamma_{\pm\frac{\sqrt{5}}{5}}$ è un'ellisse semplicemente degenere.

Analizziamo ora il segno di $det(A_{00})$. Sappiamo che se $det(A_{00}) \neq 0$ la conica è a centro e sarà un'iperbole nel caso in cui $det(A_{00}) < 0$ e un'ellisse nel caso in cui $det(A_{00}) > 0$; altrimenti, se $det(A_{00}) = 0$, la conica è una parabola.

Nel nostro caso:

$$det(A_{00}) = 1 - 4t^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2} & \text{PARABOLA} \\ 1 - 4t^2 < 0 \Leftrightarrow t < -\frac{1}{2} \vee t > \frac{1}{2} & \text{IPERBOLE} \\ 1 - 4t^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} & \text{ELLISSE} \end{cases}$$

Rimane da stabilire per quali $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si hanno ellissi a punti reali e per quali ellissi a punti non reali.
Sappiamo che ciò che differenzia un'ellisse a punti reali da un'ellisse a punti non reali nella matrice A è la segnatura; in particolare una conica sarà un'ellisse a punti reali se, oltre alla condizione $det(A_{00}) > 0$, la segnatura della sua matrice associata è $(1,2)$ o $(2,1)$, sarà invece un'ellisse a punti non reali se la segnatura della sua matrice associata è $(3,0)$ o $(0,3)$.
Ricordiamo che per determinare la segnatura (p,q) di una una matrice, basta studiare il segno degli autovalori dell'operatore associato ad essa: p sarà dunque dato dal numero di autovalori positivi e q dal numero di autovalori negativi.

Consideriamo il polinomio caratteristico di A:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & t \\ 0 & 1-\lambda & -2t \\ t & -2t & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2t \\ -2t & 1-\lambda \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ t & -2t \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4t^2] - t^2(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 5t^2] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 5t^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ 1 \pm \sqrt{5}|t|$$

Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{5}|t|$, $\lambda_3 = 1-\sqrt{5}|t|$. Ne segue che $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$; si avrà quindi segnatura $(2,1)$ quando $\lambda_3 < 0$, cioè per $t \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty\right)$, e segnatura $(3,0)$ quando $\lambda_3 > 0$, cioè per $t \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.
Intersecando con i valori di t per cui la conica Γ_t è un'ellisse, si ottiene che Γ_t è un'ellisse a punti reali per $t \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2}\right)$, mentre è un'ellisse a punti non reali per $t \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

(b) In generale se

$$\Gamma :\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

è l'equazione di una conica a centro a punti reali e pertanto con matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tale che $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, le coordinate (u,v) del centro di simmetria soddisfano le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}u + a_{12}v = 0 \\ a_{02} + a_{12}u + a_{22}v = 0 \end{cases}$$

le quali, come si può notare, hanno per coefficienti la seconda e la terza riga della matrice A.

Nel nostro caso Γ_t è una conica a centro a punti reali per $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Per questi valori di t le coordinate (u,v) del centro di simmetria sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} u - 2tv = 0 \\ t - 2tu + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2tv \\ t - 4t^2v + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2tv \\ v = \frac{t}{4t^2-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{2t^2}{4t^2-1} \\ v = \frac{t}{4t^2-1} \end{cases}$$

(c) Per quanto visto nel punto (a), $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 4xy + 2y + 1 = 0$ è un'iperbole non degenere; pertanto la forma canonica D ad essa affinemente equivalente è:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Per "trasformare" Γ_1 in D abbiamo a disposizione una successione finita di trasformazioni affini. Procediamo per vari passi:

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ -2t & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo A_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(K)$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Diagonalizziamo A_{00}:
$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

Gli autospazi corrispondenti sono $V_3 = \langle(1,-1)\rangle$ e e $V_{-1} = \langle(1,1)\rangle$; pertanto $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (1,1)$ sono due autovettori relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2.

La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{e_1, e_2\}$ alla base $\{v_1, v_2\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e se (x,y) e (x',y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{e_1, e_2\}$ e nella base $\{v_1, v_2\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità T_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = -x' + y' \end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\Gamma_1' = T_1(\Gamma_1)$ affinemente equivalente a Γ_1 tramite l'affinità T_1 sostituiamo nell'equazione di $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 4xy + 2y + 1 = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da T_1:

$(x'+y')^2 + (-x'+y')^2 - 4(x'+y')(-x'+y') + 2(-x'+y') + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma_1' : 6(x')^2 - 2(y')^2 - 2x' + 2y' + 1 = 0$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

A partire dall'equazione di Γ_1', applichiamo il metodo del raccoglimento dei quadrati:

$6(x')^2 - 2(y')^2 - 2x' + 2y' + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x')^2 - 2x' + \frac{1}{6} - 2(y')^2 + 2y' - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6((x')^2 - \frac{1}{3}x' + \frac{1}{36}) - 2((y')^2 - y' + \frac{1}{4}) + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x' - \frac{1}{6})^2 - 2(y' - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{3} = 0$

Quindi se applichiamo a Γ_1' la traslazione T_2:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{6} \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

si ottiene la conica $\Gamma_1'' = T_2(\Gamma_1')$ affinemente equivalente a Γ_1 di equazione:

$$\Gamma_1'' : 6(x'')^2 - 2(y'')^2 + \frac{4}{3} = 0$$

Dividendo per il termine noto, la precedente equazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\Gamma_1'' : \frac{9}{2}(x'')^2 - \frac{3}{2}(y'')^2 + 1 = 0$$

- **Passo 3: Normalizzazione dei coefficienti**

  Eseguendo la sostituzione (che corrisponde a un'affinità T_3):
  $$\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{3}x''' \\ y'' = \sqrt{\frac{2}{3}}y''' \end{cases}$$
  si ottiene l'equazione di $\Gamma_1''' = T_3(\Gamma_1'')$:
  $$\Gamma_1''' : (x''')^2 - (y''')^2 + 1 = 0$$
  Per ottenere l'equazione della forma canonica $D : X^2 - Y^2 = 1$ affinemente equivalente a Γ_1 rimane un'ultima trasformazione (T_4) da applicare, quella definita dalle seguenti equazioni:
  $$\begin{cases} x''' = Y \\ y''' = X \end{cases}$$

---

6. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$
con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva, avendo fissato tale valore:

(i) determinare l'immagine $\mathrm{Im} f$ di f,
(ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{Im} f$,
(iii) determinare il nucleo $\ker f$ di f,
(iv) verificare che $\ker \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$,
(v) esistono dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = (3, 2, -2)$?

[*Pfb, 28 settembre* 2011]

<u>Soluzione:</u>

Notiamo che $\det A = 3(h-2)$, dunque l'unico valore di h per il quale l'endomorfismo f non risulta essere suriettivo è 2.

(i) $\mathrm{Im} f = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

(ii) Basta risolvere il seguente sistema:
$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ k^2 - k = a + 2b \\ k = b - a \end{cases}$$
da cui otteniamo $k = 1 \pm \sqrt{6}$.

(iii) Il nucleo è $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

(iv) Il sistema
$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ammette come unica soluzione $a = b = c = 0$.

(v) Il sistema
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
è incompatibile. Dunque non esistono vettori soddisfacenti la condizione richiesta.

7. Data la matrice a coefficienti reali
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$
determinare per quale valore del parametro a la matrice ammette l'autovalore $\lambda = 1$. Posto $a = 0$, esistono tre autovettori linearmente indipendenti di A?

[*Pfb,* 1 *ottobre* 2009]

<u>SOLUZIONE:</u>

Per $a = 0$, $\lambda = 1$ è autovalore di A. Posto $a = 0$, la matrice A ammette tre autovalori distinti a cui corrispondono tre autovettori linearmente indipendenti.

---

8. Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Sia
$$V := \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{11} = a_{22}, a_{21} = 0\}.$$
(i) Si dimostri che V è un sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

(ii) Si esibisca un sottospazio U di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$;

(iii) Si decomponga la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$
come somma di una matrice $A_1 \in V$ e di una matrice $A_2 \in U$.

[*Pfb,* 12 *giugno* 2008]

<u>SOLUZIONE:</u>

(i) Basta verificare che date $A, B \in V$ allora $A - B \in V$ e $kA \in V$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si ha che $V = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ e quindi il sottospazio cercato è $U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(iii)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

9. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sia F l'endomorfismo di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definito nel modo seguente
$$F(A) = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases} \qquad \forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$
(i) Determinare $\ker(F), \mathrm{Im}(F)$ e le loro dimensioni.

(ii) Verificare che $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \ker(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

(iii) Stabilire se $\ker(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ sono autospazi di F.

(iv) Senza determinare la matrice associata a F, stabilirne la diagonalizzabilità.

[*Pfb,* 6 *ottobre* 2004]

<u>SOLUZIONE:</u>

(i) Il nucleo è costituito dalle matrici diagonali e ha dimensione 3. L'immagine invece è composta da tutte le matrici della forma
$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$
con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ed ha quindi dimensione 6.

(ii) Basta osservare che i generatori di nucleo e immagine sono tutti i vettori della base canonica.

(iii) Il nucleo è l'autospazio relativo all'autovalore 0; mentre l'immagine è l'autospazio relativo a 1.

(iv) E' diagonalizzabile in quanto la somma degli autospazi da tutto $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

---

10. Stabilire la veridicità delle seguenti affermazioni :

(i) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori;

(ii) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovettori;

(iii) Sia $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, se λ è autovalore di A allora $-\lambda$ è autovalore di A^{-1}.

[*Pfb, 23 giugno* 2004]

SOLUZIONE:

(i) Vero. Infatti, $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det({}^tA - \lambda\mathbb{I})$.

(ii) Falso. Basta scegliere $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Falso. Come dimostrato nell'esercizio 2.5 del precedente foglio di esercizi se λ è autovalore di A allora $\frac{1}{\lambda}$ è autovalore di A^{-1}.(`http://www.mat.uniroma3.it/regolamenti/regolamenti_corsi/doc_laurea_magistrale/pfb_tut1_2013.pdf`)

---

11. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si consideri l'operatore $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ così definito:
$$f(X) := AX - XA \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che f è un operatore lineare.

(ii) Determinare il nucleo di f.

(iii) Verificare che
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
non è nel nucleo di f.

(iv) Determinare se
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è nell'immagine di f.

[*Pfb, 7 giugno* 2010]

SOLUZIONE:

(i) E' lineare in quanto $A(X+Y)-(X+Y)A = AX-XA+AY-YA$ e $A(kX)-(kX)A = k(AX-XA)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Il sistema
$$A\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
ammette come soluzioni i vettori del sottospazio $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \rangle$.

(iii) Si verifica direttamente facendo i calcoli.

(iv) No, in quanto il sistema $AX - XA = M$ non ha soluzioni.

---

12. Sia $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che il $\det A \in \{-1, 1\}$ e che se $\det A = 1$ esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

[*Pfb,* 28 *gennaio* 2010]

SOLUZIONE:

$A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \cdot^t A = \mathbb{I} \Leftrightarrow \det(A \cdot^t A) = 1 \Leftrightarrow \det(A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$.
Sia $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ allora, imponendo le condizioni $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ e $\det(A) = 1$ si ha che $A = \begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$. Dunque esiste $\theta \in [0, 2\pi]$ tale che $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$.

---

13. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$. Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti e stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che

- $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$;
- $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$;
- $f(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$;
- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 2, 1, 1)$.

[*Pfb,* 10 *giugno* 2009]

SOLUZIONE:

Il sistema $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = 0$ ammette come unica soluzione quella banale. L'endomorfismo richiesto non può esistere in quanto qualora esistesse non sarebbe lineare; infatti,
$$(2, 6, 0, 1) = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) + f(\mathbf{v}_3) \neq f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 2, 1, 1).$$

---

14. Verificare che le matrici
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$
costituiscono una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e calcolare le componenti della matrice identità rispetto a tale base. Dati poi i sottospazi
$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 = 0 \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} : x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}\cap\mathcal{B}, \mathcal{A}+\mathcal{B}$.

[*Pfb,* 30 *settembre* 2010]

SOLUZIONE:

Basta osservare che il sistema $aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = 0$ ammette come unica soluzione quella banale e che $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

Le componenti della matrice identità sono date dalla soluzione del sistema $aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = \mathbb{I}$ ovvero dalla quadrupla $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{8})$.

Una base di $\mathcal{A}$ è $\left\{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Una base di $\mathcal{B}$ è data da $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$. Segue che $\dim(\mathcal{A}) = 3$ e $\dim(\mathcal{B}) = 2$.

Una base per l'intersezione è $\left\{\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, da cui $\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = 1$.

Per la formula di Grassman si ha che $\dim(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = 4$; quindi la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituisce una base per $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

---

15. Sia p un numero primo fissato e sia $I \subset \mathbb{Z}[X]$ l'insieme dei polinomi il cui termine noto è un multiplo di p. Dimostrare che

   (i) I è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$;

   (ii) I non è un ideale principale;

   (iii) $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{I} \cong \mathbb{Z}_p$.

[*Pfb,* 30 *settembre* 2010]

SOLUZIONE:

(i) Se $f, g \in I$ allora $f(0) = kp$ e $g(0) = hp$ con $h, k \in \mathbb{Z}$. Quindi $(f-g)(0) = f(0) - g(0) = p(k-h)$ implica $f - g \in I$. Siano ora $f \in I$ e $g \in \mathbb{Z}[X]$ con $f(0) = kp$ allora $(fg)(0) = kpg(0)$ (per questioni di grado) da cui $fg \in I$.

(ii) Supponiamo che esista $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tale che $I = (f(X))$. Se $\deg f \geq 1$ allora $p \notin I$. Dunque $\deg f = 0 \Rightarrow f = p$, ma allora il polinomio $X + p$ non apparterrebbe a I: Assurdo!

(iii) Si consideri l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_p$ tale che $\varphi(f) = f(0)(\mathrm{mod} p)$. Poiché φ è suriettivo e $\ker(\varphi) = I$, applicando il primo teorema di omomorfismo, si ottiene l'asserto.

---

16. Sia $\alpha = 30 \in \mathbb{Z}$.

   (i) Fattorizzare α in elementi irriducibili nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

   (ii) Determinare tutti gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/\langle\alpha\rangle$.

[*Pfb,* 30 *gennaio* 2009]

SOLUZIONE:

(i) Si ha che $\alpha = 3(1+2i)(1-2i)(1+i)(1-i)$. Si può verificare che la precedente relazione fornisce una fattorizzazione di α in irriducibili, in quanto ciascuno dei fattori è irriducibile per motivi di norma ed essi non sono associati.

(ii) Gli ideali in $\mathbb{Z}[i]/\langle\alpha\rangle$ sono tutti gli ideali di $\mathbb{Z}[i]$ contenenti $\langle\alpha\rangle$. Per la fattorizzazione di α in $\mathbb{Z}[i]$ si ha che gli ideali massimali (primi) contenenti l'ideale generato da α sono $(3), (1+2i), (1-2i), (1+i), (1-i)$.

17. Sia $\alpha := \sqrt{5+\sqrt{5}}$ e $m_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[X]$ il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

   (i) Determinare $m_\alpha(X)$.
   (ii) Calcolare il grado di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$ e determinare una base di tale ampliamento.
   (iii) Mostrare che $m_\alpha(X)$ si spezza linearmente su $\mathbb{Q}(\alpha)$.

[*Pfb, 3 ottobre* 2008]

SOLUZIONE:

(i) $m_\alpha(X) := X^4 - 10X^2 + 20$; infatti, α è radice di $m_\alpha(X)$ e $m_\alpha(X)$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein (è un 5-Eisenstein).
(ii) Per il punto (i), $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ e una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$ è $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.
(iii) Le radici di $m_\alpha(X)$ sono $\pm\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}$. Poiché $\alpha^2 - 5 = \sqrt{5}$ allora $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Quindi $\pm\sqrt{5-\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

---

18. Sia $p(X) := X^3 + 2X^2 + 4X + 2$ un elemento di $\mathbb{F}_5[X]$.

   (i) Mostrare che l'anello quoziente $K := \mathbb{F}_5[X]/\langle p(X)\rangle$ è un campo.
   (ii) Mostrare che $p(X)$ si decompone su K.
   (iii) Determinare l'inverso in K della classe $\beta := (X^2 + 3X + 1) + \langle p(X)\rangle$

[*Pfb, 3 ottobre* 2007]

SOLUZIONE:

(i) L'anello quoziente $K := \mathbb{F}_5[X]/\langle p(X)\rangle$ è un campo in quanto $p(X)$ è irriducibile (non ha radici in $\mathbb{F}_5$.
(ii) Dalla teoria si ha che $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ con $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2 = 0$. Inoltre, α^5, α^{25} sono radici di $p(X)$.
(iii) Applicando l'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore tra $p(X)$ e $X^2 + 3X + 1$ si ottiene che l'inverso è $(1 - X^2 + X)$.

---

19. Sia

$$\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_{13}, \qquad \varphi(a + bi) := a + 5b(\text{mod} 13)$$

   (i) Mostrare che φ è un omomorfismo di anelli e stabilire se esso è iniettivo e/o suriettivo.
   (ii) Trovare un generatore di $ker(\varphi)$.

SOLUZIONE:

(i) Si ha che $\varphi(a + ib) + \varphi(c + id) = a + 5b(\text{mod}13) + c + 5d(\text{mod}13) = (a + c) + 5(b + d)(\text{mod}13) = \varphi(a + c + i(b + d))$ e che $\varphi(ac - bd + i(ad + bc)) = ac - bd + 5(ad + bc)(\text{mod}13) = (a + 5b)(c + 5d)(\text{mod}13) = \varphi(a + ib)\varphi(c + id)$. L'omomorfismo φ è suriettivo in quanto $\varphi(a) = a(\text{mod}13)$ e per questioni di cardinalità φ non può essere iniettivo.
(ii) Chiaramente $3 + 2i \in \ker(\varphi) \subset Z[i]$, quindi $(3 + 2i) \subset \ker(\varphi)$. Inoltre, $3 + 2i$ irriducibile, implica $(3 + 2i)$ massimale. Da questo e dal fatto che $\mathbb{Z}[i]$ è PID segue $(3 + 2i) = \ker(\varphi)$.
