Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di preparazione alla PFB

A.A. 2012-2013 - Docenti: A. Bruno e G. Gentile
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Parte 1: Analisi Matematica

1. Sia
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x + y + z < 1\}.$$
Calcolare
$$\int_T (x + z)dxdydz$$
[*Pfb,* 20 *gennaio* 2011]

2. Determinare il comportamento delle seguenti serie precisando quali convergono assolutamente

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; (b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$; (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\binom{n}{k}}$.

   [*Pfb,* 20 *gennaio* 2011]

3. Sia
$$F = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < 1, 0 < x < \sqrt{z}\}.$$
Si disegni schematicamente il solido ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme F e se ne calcoli il volume.

   [*Pfb,* 20 *gennaio* 2011]

4. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con le coordinate $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Sia A una matrice simmetrica reale 3×3, sia u la funzione definita da $u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Dimostrare che

   (i) $\nabla u(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$;

   (ii) $\Delta u(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}(A)$.

5. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} \leq c^2\}.$$

   (i) Dimostrare che la misura di A è πedc^2;

   (ii) Dimostrare che il determinante jacobiano della trasformazione
$$\varphi : (x, y, z) \to (u, v, p) \text{ con } u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \text{ e } p = z$$
è 1.

   (iii) Calcolare
$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz$$
dove
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\}.$$
Potrebbe essere utile applicare il cambiamento di variabili del punto (ii) e affettare rispetto alla v.

   [*Pfb,* 30 *settembre* 2010]

6. Stabilire se esiste finito il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}dx$$

e, in caso affermativo, calcolarlo.

[*Pfb, 30 settembre* 2010]

7. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale.

8. Calcolare

$$\int_1^2 \frac{e^t(e^t-1)}{e^{2t}-1}dt$$

[*Pfb, 7 giugno* 2010]

9. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^{-8}}{\ln(1+e^{4x})}$.

[*Pfb, 7 giugno* 2010]

10. Si calcoli

$$\int_T xy\sin(xy)dxdy$$

dove $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x < y < 2x, \frac{2\pi}{x} < y < \frac{3\pi}{x}, x > 0\}$. Potrebbe essere utile il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

[*Pfb, 7 giugno* 2010]

11. Determinare al variare del parametro reale x la convergenza delle seguenti serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(n^{\ln x}\right)$ con $x > 0$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\arctan(1+n^2)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^n$ con $x \neq 1$.

12. Sia $u_1 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva che soddisfa l'equazione differenziale

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0 \qquad x \geq 0. \tag{1}$$

Si supponga inoltre che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{u_1^2(t)} < \infty \tag{2}$$

(i) Dimostrare che anche la funzione

$$u_2(x) = u_1(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{u_1^2(t)}$$

soddisfa (1).

(ii) Usando il punto (i), dimostrare che, se (1) ha una soluzione positiva su $[0,+\infty)$ per cui vale (2), allora (1) ha due soluzioni y_1 e y_2 positive su $[0,+\infty)$ e tali che:

(a)

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1 \qquad x > 0;$$

(b)

$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]' < 0 \qquad x > 0;$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=0.$$

[*Pfb,* 1 *ottobre* 2009]

13. Si consideri l'insieme
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+y^4+x^2-y^2=0\}.$$
   (i) Si dimostri che i punti $(0,0),(0,1)$ e $(0,-1)$ sono in A.
   (ii) Enunciare il teorema della funzione implicita in $\mathbb{R}^2$.
   (iii) Dimostrare che in un intorno del punto $(0,1)$, A è il grafico di una funzione $y(x)$; calcolare $y'(0)$. Stessa domanda per il punto $(0,-1)$.
   (iv) Determinare se valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto $(0,0)$.
   (v) Usando i moltiplicatori di Lagrange, trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y)=y$ su A.

[*Pfb,* 12 *giugno* 2008]

14. Sia dato il sistema dinamico planare
$$\begin{cases}\dot{x}=4y(x^2+y^2),\\ \dot{y}=-4y(x^2+y^2-2)\end{cases}$$
   (i) Dimostrare che esiste una costante del moto $H(x,y)$ per il sistema dato.
   (ii) Determinare i punti di equilibrio del sistema.
   (iii) Discuterne la stabilità
   (iv) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.

15. Una particella di massa m si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $V(r)$:
$$m\ddot{x}=-\partial_x V(|\mathbf{x}|)$$
con
$$V(r)=\alpha\frac{\log^2 r/r_0}{r^2}$$
e $\alpha, r_0>0$.
   (i) Si determinino le costanti del moto.
   (ii) Si disegnino il grafico del potenziale efficace, le curve di livello nel piano $(r,\dot{r})$ e si studi qualitativamente il moto radiale.
   (iii) Laddove il moto risulti periodico si calcolino i punti si inversione, i periodi del moto radiale e del moto angolare in termini di due integrali definiti.

16. Si risolva il sistema lineare di equazioni differenziali
$$\begin{cases}\dot{x}=2x+(1-\beta)y\\ \dot{y}=2(1+\beta)y+\beta z\\ \dot{z}=3\beta y+2z\end{cases}$$
al variare del parametro $\beta\in[-1;1]$ con condizione iniziale $(x(0),y(0),z(0))=(0,6,-6)$. Si discuta inoltre la stabilità del punto di equilibrio $(0,0,0)$.

17. Sia $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$.
   (a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.
   (b) Stabilire f_n e/o f_n' convergono uniformemente.
   (c) Dire per quali $x\in\mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

Parte 2: Geometria e Algebra

1. Siano A e B due matrici 3×3. Si dimostri che $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

   [*Pfb,* 28 *settembre* 2011]

2. Siano A, B due matrici $n \times n$. Si dimostri che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

   [*Pfb,* 13 *giugno* 2007]

3. Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$3X^2 - 2XY + 3Y^2 + 2X + 2Y = 0.$$

   [*Pfb,* 28 *settembre* 2011]

4. Nel piano euclideo si considerino la famiglia di coniche di equazione

$$\mathcal{F} : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0 \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

   e la retta $\mathcal{R}$ di equazione $x + y - 1 = 0$.

   (i) Si dimostri che la retta $\mathcal{R}$ è asse di simmetria di tutte le coniche della famiglia.
   (ii) Si determinino le coniche degeneri della famiglia $\mathcal{F}$.
   (iii) Fra le coniche della famiglia $\mathcal{F}$ si dimostri che ne esiste una e una sola passante per $C = (2, -1)$ e se ne determinino le equazioni in forma cartesiana e in forma canonica.

5. Dato il fascio di coniche in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$$\Gamma_t : x^2 + y^2 - 4txy + 2ty + 1 = 0$$

   (i) Classificare Γ_t al variare di t;
   (ii) Determinare il centro di simmetria di Γ_t per i valori di t per i quali Γ_t è una conica a centro.
   (iii) Per $t = 1$ ridurre Γ_1 alla sua forma canonica affinemente equivalente e scrivere l'equazione dell'affinità.

6. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

   con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva, avendo fissato tale valore:

   (i) determinare l'immagine $\mathrm{Im} f$ di f,
   (ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{Im} f$,
   (iii) determinare il nucleo $\ker f$ di f,
   (iv) verificare che $\ker \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$,
   (v) esistono dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = (3, 2, -2)$?

   [*Pfb,* 28 *settembre* 2011]

7. Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

   determinare per quale valore del parametro a la matrice ammette l'autovalore $\lambda = 1$. Posto $a = 0$, esistono tre autovettori linearmente indipendenti di A?

   [*Pfb,* 1 *ottobre* 2009]

8. Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$V := \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{11} = a_{22}, a_{21} = 0\}.$$

   (i) Si dimostri che V è un sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

(ii) Si esibisca un sottospazio U di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$;

(iii) Si decomponga la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$
come somma di una matrice $A_1 \in V$ e di una matrice $A_2 \in U$.

[*Pfb,* 12 *giugno* 2008]

9. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali $M_3(\mathbb{R})$. Sia F l'endomorfismo di $M_3(\mathbb{R})$ definito nel modo seguente
$$F(A) = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases} \qquad \forall A \in M_3(\mathbb{R}).$$

   (i) Determinare $\ker(F), \operatorname{Im}(F)$ e le loro dimensioni.

   (ii) Verificare che $M_3(\mathbb{R}) = \ker(F) \oplus \operatorname{Im}(F)$.

   (iii) Stabilire se $\ker(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$ sono autospazi di F.

   (iv) Senza determinare la matrice associata a F, stabilirne la diagonalizzabilità.

[*Pfb,* 6 *ottobre* 2004]

10. Stabilire la veridicità delle seguenti affermazioni :

   (i) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori;

   (ii) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovettori;

   (iii) Sia $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, se λ è autovalore di A allora $-\lambda$ è autovalore di A^{-1}.

[*Pfb,* 23 *giugno* 2004]

11. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si consideri l'operatore $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ così definito:
$$f(X) := AX - XA \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Verificare che f è un operatore lineare.

   (ii) Determinare il nucleo di f.

   (iii) Verificare che
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   non è nel nucleo di f.

   (iv) Determinare se
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   è nell'immagine di f.

[*Pfb,* 7 *giugno* 2010]

12. Sia $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che il $\det A \in \{-1, 1\}$ e che se $\det A = 1$ esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

[*Pfb,* 28 *gennaio* 2010]

13. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$. Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti e stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che

   - $f(\mathbf{v}_1) = v_1$;
   - $f(\mathbf{v}_2) = 2v_1 + v_2$;
   - $f(\mathbf{v}_3) = -v_2 + v_3$;
   - $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 2, 1, 1)$.

[*Pfb,* 10 *giugno* 2009]

14. Verificare che le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e calcolare le componenti della matrice identità rispetto a tale base. Dati poi i sottospazi

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 = 0 \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

[*Pfb,* 30 *settembre* 2010]

15. Sia p un numero primo fissato e sia $I \subset \mathbb{Z}[X]$ l'insieme dei polinomi il cui termine noto è un multiplo di p. Dimostrare che

    (i) I è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$;

    (ii) I non è un ideale principale;

    (iii) $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{I} \cong \mathbb{Z}_p$.

[*Pfb,* 30 *settembre* 2010]

16. Sia $\alpha = 30 \in \mathbb{Z}$.

    (i) Fattorizzare α in elementi irriducibili nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

    (ii) Determinare tutti gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/\langle\alpha\rangle$.

[*Pfb,* 30 *gennaio* 2009]

17. Sia $\alpha := \sqrt{5 + \sqrt{5}}$ e $m_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[X]$ il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

    (i) Determinare $m_\alpha(X)$.

    (ii) Calcolare il grado di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$ e determinare una base di tale ampliamento.

    (iii) Mostrare che $m_\alpha(X)$ si spezza linearmente su $\mathbb{Q}(\alpha)$.

[*Pfb,* 3 *ottobre* 2008]

18. Sia $p(X) := X^3 + 2X^2 + 4X + 2$ un elemento di $\mathbb{F}_5[X]$.

    (i) Mostrare che l'anello quoziente $K := \mathbb{F}_5[X]/\langle p(X)\rangle$ è un campo.

    (ii) Mostrare che $p(X)$ si decompone su K.

    (iii) Determinare l'inverso in K della classe $\beta := (X^2 + 3X + 1) + \langle p(X)\rangle$

[*Pfb,* 3 *ottobre* 2007]

19. Sia

$$\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_{13}, \qquad \varphi(a + bi) := a + 5b$$

    (i) Mostrare che φ è un omomorfismo di anelli e stabilire se esso è iniettivo e/o suriettivo.

    (ii) Trovare un generatore di $ker(\varphi)$.