Tutorato 2 PFB

Prima prova d'accesso a.a. 2008/2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

25 maggio 2009

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 30/01/09, n. 1.1). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)| \, dx \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| \geq 1$.

Esercizio 2 (PFB 30/01/09, n. 1.2). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue non negative, e si supponga che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = 0.$$

Tenendo presente che $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$ per $t \geq 0$, si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [1 - e^{-f_n(x)}] \, dx = 0.$$

Esercizio 3 (PFB 03/10/07, n. 1.5).

(i) Dimostrare che, per ogni $p > -1$ reale, il seguente integrale converge

$$I_p = \int_0^1 \frac{x^p \log x}{x-1} \, dx.$$

(ii) Usando un'integrazione per parti, dimostrare che

$$I_p - I_{p+1} = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

(iii) Usando le serie telescopiche, dimostrare che

$$I_p = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(p+k)^2} + I_{p+m}.$$

(iv) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log x}{x-1} & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

è continua e crescente su $[0,1]$. Da $0 \leq f(x) \leq 1$ dedurre che

$$0 \leq x^{p+m+1} \frac{x \log x}{x-1} \leq x^{p+m+1}.$$

(v) Dedurre dal punto (iv) che

$$0 \leq I_{p+m} \leq \frac{1}{p+m}.$$

Usando questa formula e il punto (iii), dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{x^p \log(x)}{x-1} \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}.$$

Esercizio 4 (PFB 07/10/05, n. 1.3). Stabilire per quali valori del parametro reale α esiste finito l'integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{|x^2-1|^\alpha}{|\log x|} \sinh(x).$$

Esercizio 5 (PFB 23/06/04, n. 1.5). Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{2 + \sin \frac{1}{x^2}}{(x^\alpha + 1)(\log x)^2}$$

è integrabile su $[2, +\infty]$?

GEOMETRIA

Esercizio 6 (PFB 30/01/09, n. 2.3). Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(i) Trovare i valori di h per cui A ha rango minore di 3.

(ii) Stabilire se, posto $h = 1$, A è diagonalizzabile.

Esercizio 7 (PFB 30/01/09, n. 2.5). Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente l'autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità 2 e

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) : x - y = y + z = 0\}, \qquad \mathrm{Im} f = \{(x,y,z) : 2x - y - z = 0\}.$$

Esercizio 8 (PFB 03/10/08, n. 2.3). Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} h-1 & h & 1-2h & h-1 \\ h & 1 & -h-1 & h \\ h & 1 & -h-1 & h \\ 1 & 1-h & h-2 & 1 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

(i) Determinare i valori di h per cui risulta $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Im}\phi$.

(ii) Posto $h = 0$, determinare gli autospazi di ϕ.

Esercizio 9 (PFB 02/02/04, n. 2.4). Sia $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$G = \mathbb{R}^* \cup \{ix | x \in \mathbb{R}^*\}.$$

1. Verificare che G è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli.
2. Provare che

$$G \simeq (\mathbb{R}^+, \cdot) \times (\mathbb{Z}_4, +).$$